Семантики квантовой логики

1. Квантовая логика

2. Алгебра эффектов

3. Реляционная семантика

В 1936г. Дж.фон Нейман и Г.Биркгоф формулируют *логику квантовой механики*, которая должна была стать теорией рассуждения о квантовомеханических системах. Эта реализация была основана на исчислении замкнутых подпространств гильбертовых пространств, что сказалось на развитии квантовой логики как особой алгебраической структуры, интерпретацией которой является множество "экспериментальных высказываний"о физической системе. Множество подпространств гильбертового пространства в такой системе исключает дистрибутивность, задает недистрибутивные решетки - *ортомодулярные* и *орторешетки*.

Системы, построенные фон Нейманом и Биркгофом отталкивалась от идеи бинарных семантик, предполагающих в качестве истинностных значений только *истину* и *ложь*.

Системы, построенные фон Нейманом и Биркгофом отталкивалась от идеи бинарных семантик, предполагающих в качестве истинностных значений только *истину* и *ложь*.
Однако исследователи предлагают расширить множество истинностных значений до истинностного интервала [0,1] действительных чисел, что задает класс нерезких квантовых логик.

Эффект

Эффектом в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является ограниченный линейный оператор E, для каждого оператора плотности ρ удовлетворяющий условию *борновской вероятности*, формулиремому следующим образом:

$$Tr(\rho E) \in [0, 1]$$

Алгебра эффектов

Алгеброй эффектов называется структура $\mathbf{E} = \langle L, \oplus, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, где L - непустое множество; $\oplus$ - частично определенная бинарная операция, называемая *ортосуммой* на множестве L, удовлетворяющая условию $a \oplus b = a + b$ если и только если $a + b \leqslant \mathbf{1}$, где операция + соответствует арифметическому сложению; $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ - элементы множества L для всяких $a, b, c \in L$ верны следующие аксиомы:

EA1 Если $a \oplus b$ определено, то $b \oplus a$ также определено и верно, что $a \oplus b = b \oplus a$

EA2 Если $a \oplus b$ и $(a \oplus b) \oplus c$ определены, то $b \oplus c$ и $a \oplus (b \oplus c)$ также определены и верно, что $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

EA3 Для всякого $a \in L$ существует единственное $b \in L$ такое, что $(a \oplus b)$ определено и верно, что $(a \oplus b) = \mathbf{1}$

EA4 Если $a \oplus \mathbf{1}$ определено, то $a = \mathbf{0}$

Кроме этого, важно отметить следующие структуры в алгебре эффектов. Пусть $p, q \in L$, тогда:

(i) *p ортогонально к q* и записывается $p \perp q$ если и только если $p \oplus q$ определено.

(ii) *p меньше или равно q* если и только если существует элемент $r \in L$, такой что $p \perp r$ и $p \oplus r = q$

(iii) *Ортодополнением* к p называется такой элемент q, что $p \perp q$ и $p \oplus q = \mathbf{1}$ и обозначается p'

Пропозициональный язык $\mathcal{L}$ **QLE** включает в себя следующие связки: *отрицание* ($\neg$) и *дизъюнкцию* ($\vee$). Понятие *предложения* (или *формулы*) $\mathcal{L}$ определяется стандартно. Пусть $Form^{\mathcal{L}}$ представляет множество всех предложение $\mathcal{L}$. Метапеременные $A, B, C, \ldots$ пробегают по формулам.

Базисным понятием семантики является понятие *реализации в алгебре эффектов*, которое задается с помощью интерпретации языка $\mathcal{L}$, когда эффекты ассоциируются с формулами. Формальное определение выглядит следующим образом:

Реализация в алгебре эффектов $\mathcal{L}$

Реализация в алгебре эффектов $\mathcal{L}$ представляет собой функцию Eff, ассоциирующую с любым предложением оператор-эффект из алгебры эффектов

$$Eff : Form^{\mathcal{L}} \to \mathbf{E}$$

Крипкевской реляционной структурой (фреймом) для алгебры эффектов будем называть упорядоченную пятерку
$\mathfrak{F} =< \mathcal{S}, \mathcal{R}, *, 0, 1 >$, где
$\mathcal{S}$ является непустым множеством состояний на гильбертовом пространстве H;
$\mathcal{R}$ является тернарным отношением на множестве состояний ($\mathcal{R}^3 \subseteq \mathcal{S}^3$);
$*$ является унарной операцией на множестве $\mathcal{S}(* : \mathcal{S} \to \mathcal{S})$;
$\mathbf{0}, \mathbf{1}$ являются выделенными состояниями в $\mathcal{S}$.

Для тернарного отношения $\mathcal{R}$ верны следующие определения:

Df1. $a \leq b \Leftrightarrow \exists c \mathcal{R} acb$

Df2. $a \perp b \Leftrightarrow \exists x \mathcal{R} abx$

Df3. $\mathcal{R}^2 abcd \Leftrightarrow \exists x (\mathcal{R} abx \ \& \ \mathcal{R} xcd)$

Df4. $\mathcal{R}^2 a(bc)d \Leftrightarrow \exists x (\mathcal{R} axd \ \& \ \mathcal{R} bcx)$

Постулаты для тернарного отношения $\mathcal{R}$:

1. $\mathcal{R}abc \Rightarrow \mathcal{R}bac$
2. $\mathcal{R}^2(ab)cd \Leftrightarrow \mathcal{R}^2a(bc)d$
3. $\forall a \exists ! x \mathcal{R}ax1$
4. $\mathcal{R}a11 \Rightarrow \mathcal{R}011$
5. $\mathcal{R}000$
6. $\mathcal{R}aa^*1$
7. $a \leq b \Rightarrow b^* \leq a^*$
8. $a^{**} = a$

Крипкевской моделью для алгебры эффектов будем называть упорядоченную семерку $\mathfrak{M} =< \mathcal{S}, \mathcal{R}, *, \rho, 0, 1 >$, где
$< \mathcal{S}, \mathcal{R}, *, 0, 1 >$ является реляционной структурой;
ρ является функцией верификации $\rho : \mathcal{A} \times \mathcal{S} \to [0, 1]$, которая всякому эффекту в некотором состоянии сопоставляет действительное число из интервала $[0, 1]$ - его борновскую вероятность;
$\mathbf{0}, \mathbf{1}$ являются выделенными состояниями в $\mathcal{S}$.

Далее, обозначим за $\|A\|_a$ множество $\{\varphi \in S : \rho(A, \varphi) = a\}$ всех состояний, в дальнейшем называемое *a–пропозицией* или *a–экстенсионалом эффекта*, в которых борновская вероятность эффекта A имеет значение a.

Пропозиции образуются следующим образом: $\|\alpha\|_a = \{\varphi \in S : \rho(\alpha, \varphi) = a\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{S})$;
$\|A'\|_a = \{\psi^* \in S : \mathcal{R}\varphi\psi x \;\&\; \rho(A, \varphi) = a \;\&\; \rho(A, \psi) = 1 - a\}$
$\|A \oplus B\|_a = \{\psi \in S : \mathcal{R}\varphi_1, \varphi_2, \psi \;\&\; \rho(A, \varphi_1) = b \;\&\; \rho(B, \varphi_2) = c \;\&\; (a = b + c \;\&\; b + c \leq 1) \vee a = 1\}$

Множество экстенсионалов определим как: $\|A\| = \bigcup\limits_a \|A\|_a$;
$\|A'\| = \bigcup\limits_a \|A'\|_a$;
$\|A \oplus B\| = \bigcup\limits_a \|A \oplus B\|_a$

$\|0\| = \varnothing$
$\|1\| = S$

обозначая множество всех экстенсионалов как $\mathbf{\Pi}$, зададим функцию оценки v, которая сопоставляет всякому эффекту значение его экстенсионала из $\mathbf{\Pi}$:

$v(A) = \|A\|$

$v(A') = \|A'\|$

$v(A \oplus B) = \|A \oplus B\|$

Учитывая постулаты 3, 6 можно определить операцию $'$ на экстенсионалах как
$v(A)' = \bigcup\limits_{1-a} \{\varphi \in S : \rho(A,\varphi) = 1 - a\})' = \bigcup\limits_{a} \{\varphi^* \in S : \rho(A,\varphi) = 1 - a \;\&\; \rho(A,\varphi^*) = a\}$,
и операцию $\oplus$ соответственно:

$v(A) \oplus v(B) = \bigcup\limits_{b} \{\psi \in S : \mathcal{R}\varphi_1\varphi_2\psi \;\&\; \rho(A,\varphi_1) = b\} \oplus \bigcup\limits_{c} \{\psi \in S : \rho(B,\varphi_2) = c\} = \bigcup\limits_{a} \{\psi \in S : \mathcal{R}\varphi_1\varphi_2\psi \;\&\; \rho(A,\varphi_1) = b \;\&\; \rho(B,\varphi_2) = c \;\&\; (a = b + c \;\&\; b + c \leq 1) \vee a = 1\}$

Таким образом, мы получаем для функции оценки
$v(A') = v(A)'$
$v(A \oplus B) = v(A) \oplus v(B)$

A влечет B в реализации в алгебре эффектов **E**, тогда и только тогда, когда $A \leq B$.
A алгебраически влечет B тогда и только тогда, когда для любой **E** имеет место $A \vDash_{\mathbf{E}} B$.

A реляционно влечет B в крипкевской модели $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{R}, ^*, \rho, 0, 1 \rangle$, тогда и только тогда, когда $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\rho(A, \varphi) \leq \rho(B, \varphi))$.
A реляционно влечет B тогда и только тогда, когда для любой $\mathfrak{M}$ имеет место $A \vDash_{\mathfrak{M}} B$.

Крипкевская реализация для квантовой логики эффектов.
Крипкевская реализация **QLE** представляет собой систему $K = \langle \mathcal{S}, \mathcal{R}, ^*, \rho, 0, 1, \mathbf{\Pi}, v \rangle$, где:

(1) $\langle \mathcal{S}, \mathcal{R}, ^*, \rho, 0, 1 \rangle$ есть крипкевская модель, а $\mathbf{\Pi}$ является множеством экстенсионалов, содержащим $\varnothing, \mathcal{S}$ и замкнутым относительно $'$ и $\oplus$;

(2) v есть функция, сопоставляющая любой формуле (эффекту) экстенсионал из $\mathbf{\Pi}$, удовлетворяющий следующим условиям:
$v(A') = \|A'\|$
$v(A \oplus B) = \|A \oplus B\|$

Спасибо за внимание!