ТЕОРЕТИКО-КАТЕГОРНАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОДУКЦИОННЫХ СИСТЕМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗНАНИЙ

А.В.Жожикашвили
ИППИ РАН
zhozhik@iitp.ru

Интеллектуальные компьютерные системы, основанные на знании

Система, основанная на знании, должна хранить в памяти описание большого числа стереотипных ситуаций, с которыми она может встретиться в процессе работы

Один шаг работы системы:

- Система узнает ситуацию, т.е. находит в базе знаний описание этой ситуации
- Система находит в базе инструкции о том, что нужно (можно, полезно…) сделать в этой ситуации
- В результате выполнения этих инструкций возникает новая ситуация

Суть понятия продукции

- Продукция состоит из описания двух ситуаций.
- Левая часть продукции – описание ситуации, в которой продукция применима
- Правая часть продукции – описание ситуации, которая возникает поле ее применения

Образец. Сопоставление. Конкретизация.

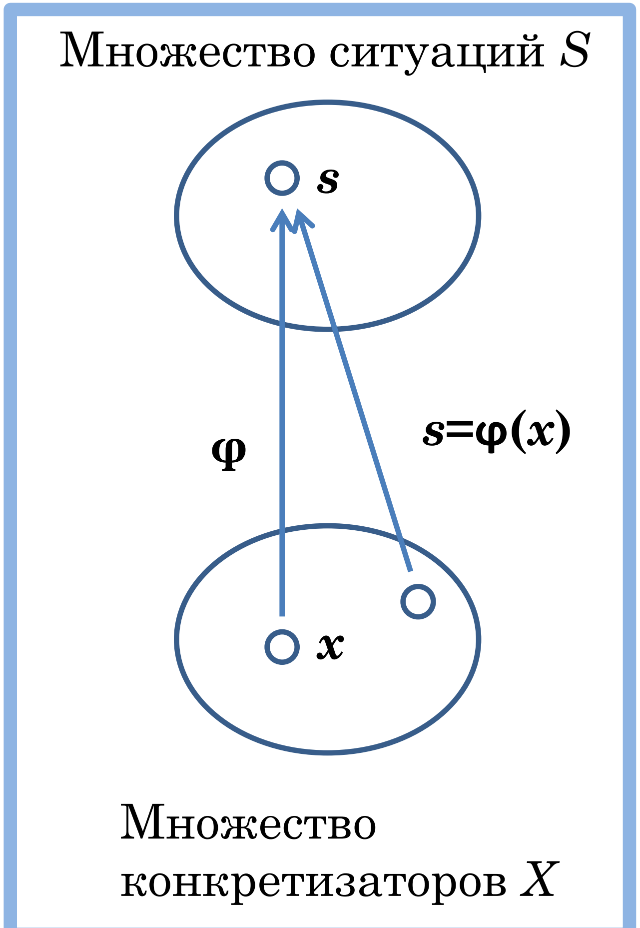
- Образец – обобщенное описание ситуации, в котором некоторые детали опущены.
- Конкретизация образца – добавление этих деталей к описанию. В результате получаем полное описание, т.е. ситуацию.
- Сопоставление ситуации с образцом – проверка, может ли образец быть конкретизирован так, чтобы из него получилась данная ситуация.

Определение продукции – следующий шаг

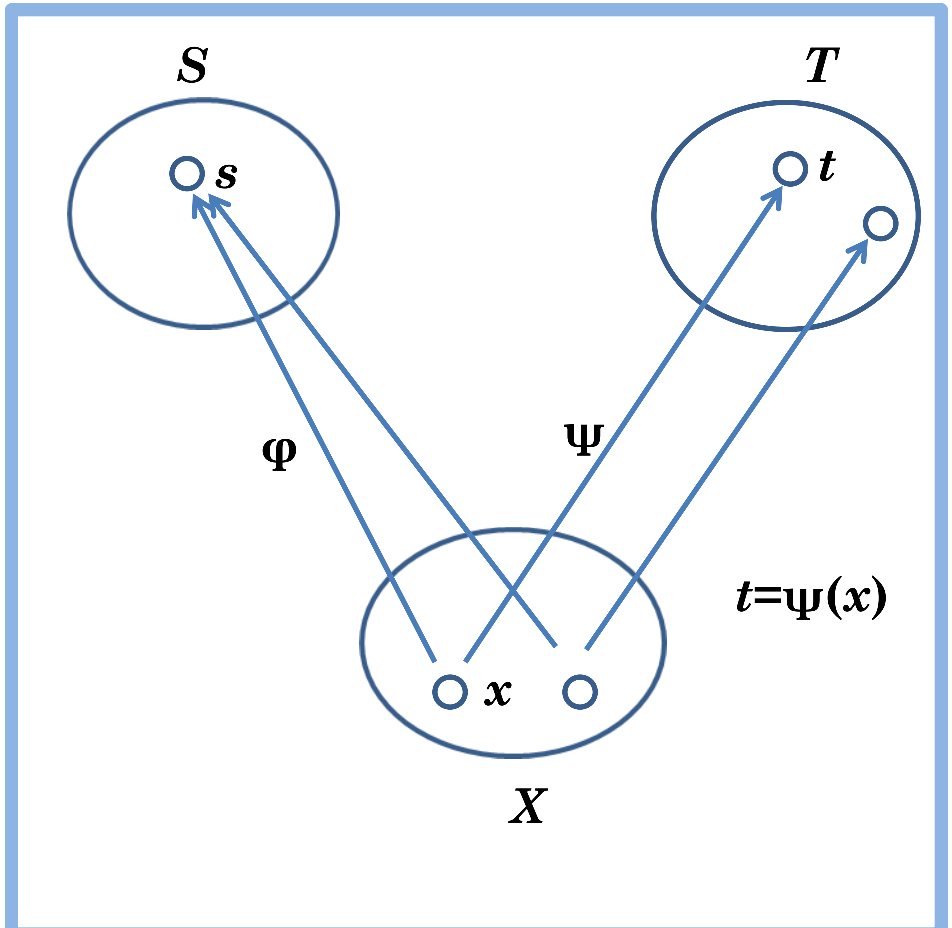
- Продукция представляет собой пару образцов (левая и правая часть продукции).
- Продукция применима к ситуации, если эта ситуация сопоставима с левой частью этой продукции.
- Результат применения продукции – ситуация, являющаяся результатом конкретизации правой части продукции, причем *правая часть должна быть конкретизирована таким же образом, каким была конкретизирована левая часть в процессе сопоставления с ситуацией.*

Образец и продукция
на языке множеств и отображений

***S*-образец**



Продукция из S в T



От системы образцов – к теории категорий

Задать систему образцов – это значит определить следующее:

1. какие множества могут выступать в качестве множеств ситуаций/конкретизаторов
2. какие отображения могут выступать в качестве образцов

Класс образцов замкнут относительно композиции и содержит тождественные отображения.

Задать систему образцов – это значит

- задать подкатегорию **C** категории множеств
- для каждой пары объектов *X* и *Y* категории **C** определить множество $\mathbf{C}_S(X,Y)\subset\mathbf{C}(X,Y)$ - множество ситуаций.

Потребуем выполнение *условия ситуационной замкнутости*:

$$\forall\alpha\in\mathbf{C}(I,X),\ \varphi\in\mathbf{C}(X,Y),\ \varphi\alpha\in\mathbf{C}_S(I,Y)\ \Leftrightarrow\ \alpha\in\mathbf{C}_S(I,X)$$

Теоретико-категорные определения

S-образец

$$\begin{tikzcd} S \\ X \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

Сопоставление ситуации с образцом

$$\begin{tikzcd} & S & \\ I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Продукция из S в T

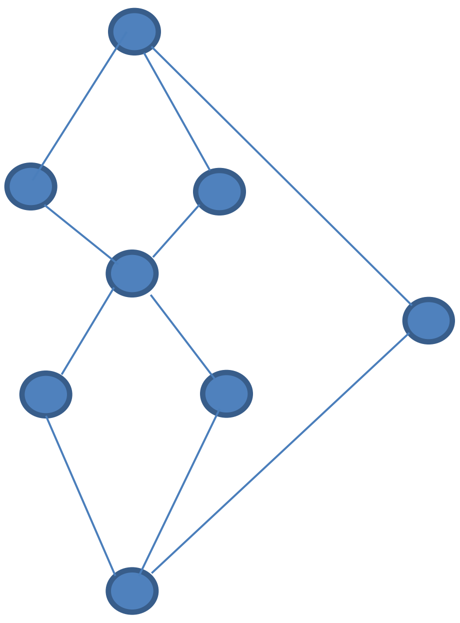
$$\begin{tikzcd} S & & T \\ & X \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[ur, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

Применение продукции к ситуации

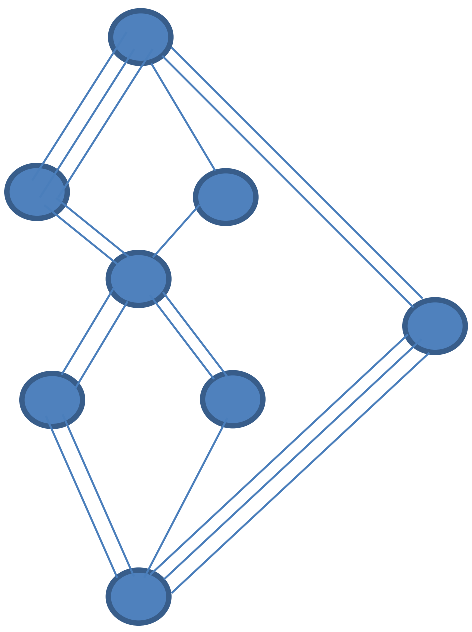
$$\begin{tikzcd} & S & & T \\ I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[ur, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{\alpha \to \psi\beta}$$

Почему категории



Частично упорядоченное множество



Категория

Порядок на множестве образцов

S – объект категории $\mathbf{C}$. $\mathbf{C}/S$ – множество S–образцов.

Пусть $\varphi, \psi \in \mathbf{C}/S$ т.е. $\varphi\colon X \to S, \psi\colon Y \to S$

$\varphi \leq \psi$ если для некоторого $\chi\colon X \to Y$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S & \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, dashed, "\chi"] & & Y \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Это предпорядок.

$\overline{\mathbf{C}/S}$ – фактормножество $\mathbf{C}/S$ по отношению

$\varphi \sim \psi \;\Leftrightarrow\; \varphi \leq \psi \;\&\; \psi \leq \varphi$

Наименьшее обобщение

$\sigma{:}Z\to S$ - наименьшее обобщение $\varphi{:}X\to S$ и $\psi{:}Y\to S$:

$$
\begin{tikzcd}
 & S & \\
X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\lambda"] & Z \arrow[u, "\sigma"] & Y \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & S & \\
X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\lambda'"] & Z' \arrow[u, "\sigma'"] & Y \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[l, "\mu'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & S & \\
Z \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\tau"] & & Z' \arrow[ul, "\sigma'"']
\end{tikzcd}
$$

Рекурсивно организованные системы образцов

- Образец – конструкция, построенная по определеным правилам
- Образец может содержать переменные, на место которых могут быть подставлены другие образцы
- Ситуация – образец, не содержащий переменных
- Конкретизация образца – подстановка ситуаций вместо переменных

Монады и Ω-категория

Пусть (F,η,μ) - монада на категории множеств

$F:\mathbf{Set}\to\mathbf{Set}$, η - единица, μ - умножение.

$U\subset X$, $|U|<\infty$ $\quad\Omega(U)=\mathbf{Set}(U,FX)$

$\varphi\in\mathbf{Set}(V,FU)$

$\varphi^*:\Omega(U)\to\Omega(V)$ $\quad\varphi^*(\alpha)=\mu_X\circ F\alpha\circ\varphi$ $\quad\alpha\in\Omega(U)$

Объекты: $\Omega(U)$

Морфизмы: $\varphi^*:\Omega(U)\to\Omega(V)$

Свободные алгебры

$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \ldots$ - сигнатура

$\mathbf{F}$ - многообразие Ω-алгебр (это категория)

$S : \mathbf{Set} \to \mathbf{F}$ - функтор свободы

$T : \mathbf{F} \to \mathbf{Set}$ - забывающий функтор

$F = TS$ - монада на **Set**

Эта модель реализует следующую схему:
- ситуация – выражение,
- образец – выражение, содержащее переменные,
- конкретизация – подстановка констант вместо переменных

$$f(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (a_1, \ldots, a_n) \to f(a_1, \ldots, a_n)$$

Свободные алгебры – строки символов

$$\Omega_0 = A, \quad |\Omega_2| = 1 \qquad\qquad x(yz) = (xy)z$$

ситуация: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \quad a_i \in A$

образец: $c_1, c_2, \ldots, c_n, \quad c_i \in A \cup X$

$$s = s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad A^n \to A \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \to s(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$xaby \to xbay$$

Свободные алгебры – подмножества

$$\Omega_0 = A, \quad |\Omega_2| = 1$$

$$x(yz) = (xy)z$$
$$xy = yx$$
$$x^2 = x$$

ситуация: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad a_i \in A$

образец: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup x, \qquad a_i \in A, \; x \subset X$

$$\{a, b\} \cup x \to \{a, b, c\} \cup x$$

Абсолютно свободные алгебры

Ω произвольно тождеств нет

ситуация: выражение

образец: выражение с переменными

$$f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad E^n \to E \qquad (e_1, e_2, ..., e_n) \to s(e_1, e_2, ..., e_n)$$

$$son(x, z) \,\&\, son(y, z) \to brother(x, y)$$