

Категорная модель модального лямбда-исчисления, основанного на интуиционистской эпистемической логике.

Даня Рогозин

Март, 2018

Мотивация. Функциональное программирование на языке Haskell.

- ▶ Обратимся в рамках мотивации к функциональному программированию на таких языках, как Haskell, Purescript, Elm или Idris;
- ▶ Без ограничения общности разделим типы в языке Haskell (или в любом другом из языков выше) на две части: простые типы и параметризованные;
- ▶ Простые типы (`Int`, `String`, `Char`, etc) – это привычные типы данных;
- ▶ Параметризованные типы (`List Int`, `Maybe Char`, `IO String`) используются для вычислений в рамках оговоренного вычислительного контекста;
- ▶ Аналогично можно и разделить функции.

Мотивация. Функтор.

Класс типов `Functor` – это общий интерфейс для “выполнения действия над параметризованным типом, обобщение функции `map` на списках”:

```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b.
```

Мотивация. Монада.

Согласно Naskage: “С точки зрения хаскеллиста лучше всего определять монаду как тип данных для произвольных действий”. В частности, вычисления в мире ввода-вывода – частный случай монадических вычислений.

(Старое) определение монады:

```
class Functor m => Monad m where
  return : a -> m a
  (»=) :: m a -> (a -> m b) -> m b.
```

Монадическая композиция (композиция действий):

```
(>=>) :: Monad m => (a -> m b) -> (b -> m c) -> a -> m c
```

Конечная цель: аппликативные функторы.

Аппликативные функторы сильнее функторов и слабее монад:

```
class Functor f => Applicative f where
  pure :: a -> f a
  (<*>) :: f (a -> b) -> f a -> f b
```

Используя аппликативный функтор, мы можем вложить значение в вычислительный контекст `f` с помощью `pure` и выполнить аппликацию внутри `f` применением `<*>`.

Использование:

- ▶ Обобщение `fmap` для функции произвольной аргности:
`liftAn = pure f <*> a1 <*> ... <*> an`
- ▶ Парсинг;
- ▶ Монада в современном Haskell является наследником аппликativa.

Монадические вычисления в теории.

- 1) *Eugenio Moggi*. "Notions of computation and monads." *Inf. Comput.*, 93(1): 55–92, 1991.
- 2) *Frank Pfenning and Rowan Davies*. "A judgmental reconstruction of modal logic." *Mathematical. Structures in Comp. Sci.* 11, 4 (August 2001), 511–540.
- 3) *Bierman, G., and De Paiva, V.* On an Intuitionistic Modal Logic. *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, 65(3), 2000. 383–416.
etc...

Апplikативные функторы.

К сожалению, аппликативный функтор является далеко не самой известной концепцией за вне сообщества хаскеллистов. Возможная причина: аппликативные функторы рассмотрены с программистской точки зрения, без теоретического рассмотрения, то есть теоретико-доказательного построения синтаксиса и алгебраической (категорной) модели.

Пример нескольких работ:

- 1) *Conor McBride and Ross Paterson*. “Applicative Programming with Effects.” *Journal of Functional Programming* 18:1 (2008), pages 1–13.
- 2) *Ross Paterson*. “Constructing Applicative Functors.” *Mathematics of Program Construction*, Madrid, 2012, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 7342, pp. 300–323, Springer, 2012.

Белое пятно: стоит рассмотреть модальное лямбда-исчисление, которые могло бы аксиоматизировать вычисления с аппликативным функтором и имело хорошую алгебраическую модель.

Интуиционистская эпистемическая логика IEL^- .

Данную проблему удобно решать, если мы располагаем некоторой конструктивной модальной логикой с хорошими аксиомами, по которой мы можем построить интересное нам модальное лямбда-исчисление:

Определение

Интуиционистская эпистемическая логика IEL^- :

- 1) Аксиомы IPC ;
- 2) $\mathbf{K}(A \rightarrow B) \rightarrow (\mathbf{K}A \rightarrow \mathbf{K}B)$ (нормальность);
- 3) $A \rightarrow \mathbf{K}A$ (ко-рефлексия);

Правило: MP .

- 1) Artemov S., Protopopescu T. (2014, June). Intuitionistic epistemic logic. ArXiv, math.LO 1406.1582v1.
- 2) Krupski V. N., Alexey Y. "Sequent calculus for intuitionistic epistemic logic IEL" // Logical Foundations of Computer Science – Vol. 9537 of Lecture Notes in Computer Science. – Springer, 2016. – P. 187–201.

Натуральный вывод для IEL^- .

Определение

Натуральное исчисление $NIEL^-$ для интуиционистской эпистемической логики IEL^- – это расширение натурального исчисления для интуиционистской логики высказываний с добавлением следующих правил вывода для модальности:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathbf{K}A} \mathbf{K}_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{K}A_1, \dots, \Gamma \vdash \mathbf{K}A_n \quad A_1, \dots, A_n \vdash B}{\Gamma \vdash \mathbf{K}B}$$

Натуральный вывод для IEL^- .

Лемма

$$\Gamma \vdash_{NIEL^-} A \Rightarrow IEL^- \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow A.$$

Proof.

Индукция по построению вывода. Рассмотрим модальные случаи.

1) Если $\Gamma \vdash_{NIEL^-} A$, тогда $IEL^- \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \mathbf{K}A$.

$$(1) \quad \bigwedge \Gamma \rightarrow A$$

$$(2) \quad A \rightarrow \mathbf{K}A$$

$$(3) \quad (\bigwedge \Gamma \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \mathbf{K}A) \rightarrow (\bigwedge \Gamma \rightarrow \mathbf{K}A))$$

$$(4) \quad (A \rightarrow \mathbf{K}A) \rightarrow (\bigwedge \Gamma \rightarrow \mathbf{K}A)$$

$$(5) \quad \bigwedge \Gamma \rightarrow \mathbf{K}A$$

предположение индукции

ко-рефлексия

теорема IPC

из (1), (3) и MP

из (2), (4) и MP



Натуральный вывод для IEL^- .

Proof.

2) Если $\Gamma \vdash_{NIEL^-} \mathbf{K}\vec{A}$ и $\vec{A} \vdash B$, то $IEL^- \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \mathbf{K}B$.

- (1) $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigwedge_{i=1}^n \mathbf{K}A_i$ предположение индукции
- (2) $\bigwedge_{i=1}^n \mathbf{K}A_i \rightarrow \mathbf{K} \bigwedge_{i=1}^n A_i$ теорема IEL^-
- (3) $\bigwedge \Gamma \rightarrow \mathbf{K} \bigwedge_{i=1}^n A_i$ по (1), (2) и правилу силлогизма
- (4) $\bigwedge_{i=1}^n A_i \rightarrow B$ предположение индукции
- (5) $(\bigwedge_{i=1}^n A_i \rightarrow B) \rightarrow \mathbf{K}(\bigwedge_{i=1}^n A_i \rightarrow B)$ ко-рефлексия
- (6) $\mathbf{K}(\bigwedge_{i=1}^n A_i \rightarrow B)$ из (4), (5) и MP
- (7) $\mathbf{K} \bigwedge_{i=1}^n A_i \rightarrow \mathbf{K}B$ по (6) и по нормальности
- (8) $\bigwedge \Gamma \rightarrow \mathbf{K}B$ по (3), (7) и правилу силлогизма



Натуральный вывод для IEL^- .

Лемма

Если $IEL^- \vdash A$, то $NIEL^- \vdash A$.

Proof.

Построение выводов для модальных аксиом в $NIEL^-$.



Модальное лямбда-исчисление по IEL^-

Определение

Модальное λ -исчисление, основанное на исчислении IEL^- :

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \mathbf{pure} M : \mathbf{KA}} \mathbf{K}_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \vec{M} : \mathbf{KA} \quad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{\Gamma \vdash \mathbf{let pure} \vec{x} = \vec{M} \mathbf{in} N : \mathbf{KB}} \mathbf{let}_K$$

$\Gamma \vdash \vec{M} : \mathbf{KA}$ – это синтаксический сахар для $\Gamma \vdash M_1 : \mathbf{KA}_1, \dots, \Gamma \vdash M_n : \mathbf{KA}_n$ и $\vec{x} : \vec{A} \vdash N : B$ – это краткая форма для $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash N : B$. $\mathbf{let pure} \vec{x} = \vec{M} \mathbf{in} N$ – это мгновенное локальное связывание в терме N . Мы будем использовать такую краткую форму вместо $\mathbf{let pure} x_1, \dots, x_n = M_1, \dots, M_n \mathbf{in} N$.

Примеры деревьев вывода

$$\frac{\frac{x : A \vdash x : A}{x : A \vdash \mathbf{pure} x : \mathbf{KA}}}{\vdash (\lambda x. \mathbf{pure} x) : A \rightarrow \mathbf{KA}}$$

$$\frac{\frac{f : \mathbf{K}(A \rightarrow B) \vdash f : \mathbf{K}(A \rightarrow B) \quad x : \mathbf{KA} \vdash x : \mathbf{KA} \quad \frac{g : A \rightarrow B \vdash g : A \rightarrow B \quad y : A \vdash y : A}{g : A \rightarrow B, y : A \vdash gy : B}}{f : \mathbf{K}(A \rightarrow B), x : \mathbf{KA} \vdash \mathbf{let pure} g, y = f, x \mathbf{ in} gy : \mathbf{KB}}}{f : \mathbf{K}(A \rightarrow B) \vdash \lambda x. \mathbf{let pure} g, y = f, x \mathbf{ in} gy : \mathbf{KA} \rightarrow \mathbf{KB}} \text{ let}_K$$

$$\vdash \lambda f. \lambda x. \mathbf{let pure} g, y = f, x \mathbf{ in} gy : \mathbf{K}(A \rightarrow B) \rightarrow \mathbf{KA} \rightarrow \mathbf{KB}$$

Подстановка

Определение

Подстановка:

- 1) $x[x := N] = N$, $x[y := N] = x$;
- 2) $(MN)[x := N] = M[x := N]N[x := N]$;
- 3) $(\lambda x.M)[x := N] = \lambda x.M[y := N]$, $y \in FV(M)$;
- 4) $(M, N)[x := P] = (M[x := P], N[x := P])$;
- 5) $(\pi_i M)[x := P] = \pi_i(M[x := P])$, $i \in \{1, 2\}$;
- 6) $(\mathbf{pure} M)[x := P] = \mathbf{pure} (M[x := P])$;
- 7) $(\mathbf{let} \mathbf{pure} \vec{x} = \vec{M} \mathbf{in} N)[y := P] = \mathbf{let} \mathbf{pure} \vec{x} = (\vec{M}[y := P]) \mathbf{in} N$.

Редукция

Определение

Правила β -редукции и η -редукции:

$$1) (\lambda x.M)N \rightarrow_{\beta} M[x := N];$$

$$2) \pi_1 \langle M, N \rangle \rightarrow_{\beta} M;$$

$$3) \pi_2 \langle M, N \rangle \rightarrow_{\beta} N;$$

$$4) \text{let pure } \vec{x}, y, \vec{z} = \vec{M}, \text{let pure } \vec{w} = \vec{N} \text{ in } Q, \vec{P} \text{ in } R \rightarrow_{\beta} \\ \text{let pure } \vec{x}, \vec{w}, \vec{z} = \vec{M}, \vec{N}, \vec{P} \text{ in } R[y := Q]$$

$$5) \text{let pure } \vec{x} = \text{pure } \vec{M} \text{ in } N \rightarrow_{\beta} \text{pure } N[\vec{x} := \vec{M}]$$

$$6) \text{let pure } _ = _ \text{ in } M \rightarrow_{\beta} \text{pure } M, \text{ где } _ \text{ — это пустая последовательность термов.}$$

$$7) \lambda x.fx \rightarrow_{\eta} f;$$

$$8) \langle \pi_1 P, \pi_2 P \rangle \rightarrow_{\eta} P;$$

$$9) \text{let pure } x = M \text{ in } x \rightarrow_{\eta} M;$$

Метатеоретические свойства системы

Теорема

Редукция субъекта

Если $\Gamma \vdash M : A$ и $M \rightarrow_{\beta\eta} N$, тогда $\Gamma \vdash N : A$

Теорема

Отношение \rightarrow_{β} сильно нормализуемо;

Теорема

Отношение \rightarrow_{β} конфлюентно.

Теорема

Нормальная форма λ_{κ} со стратегией вычисления с вызовом по имени обладает свойством подформульности: если M в нормальной форме, то всего его подтермы также в нормальной форме.

Категорная модель. Теоретико-категорные preliminaries.

Определение

Моноидальная категория – это категория \mathcal{C} с дополнительной структурой:

- ▶ Бифунктор $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, который мы будем называть тензором;
- ▶ Единица $\mathbb{1}$;
- ▶ Изоморфизм, который мы будем называть ассоциатором:
 $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$;
- ▶ Изоморфизм $L_A : \mathbb{1} \otimes A \cong A$;
- ▶ Изоморфизм $R_A : A \otimes \mathbb{1} \cong A$;
- ▶ Первое условие когерентности (пятиугольник Маклейна);
- ▶ Второе условие когерентности (тождество треугольника).

Легко видеть, что декартово замкнутая категория – это частный случай (симметрической) моноидальной категории, в котором тензор – это произведения, а единица – это терминальный объект.

Категорная модель. Теоретико-категорные preliminaries.

Определение

Моноидальный функтор

Пусть $\langle \mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \rangle$ и $\langle \mathcal{D}, \otimes_2, \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \rangle$ моноидальные категории.

Моноидальный функтор $\mathcal{F} : \langle \mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \rangle \rightarrow \langle \mathcal{D}, \otimes_2, \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \rangle$ это функтор $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ с дополнительными естественными преобразованиями:

- ▶ $u : \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$;
- ▶ $*_{A,B} : \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B \rightarrow \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B)$;
- ▶ Три условия когерентности: ассоциативность, свойство левой и правой единиц.

Категорная модель. Теоретико-категорные preliminaries.

Определение

Тензорно-сильный функтор – это эндифунктор над моноидальной категорией с дополнительным естественным преобразованием:

$$\tau_{A,B} : A \otimes KB \rightarrow K(A \otimes B)$$

Определение аппликативного функтора.

Определение

Аппликативный функтор – это тройка $\langle \mathcal{C}, \mathcal{K}, \eta \rangle$, где \mathcal{C} – это моноидальная категория, \mathcal{K} – это тензорно-сильный моноидальный эндифунктор и $\eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{K}$ – это естественное преобразование, такое, что:
(сейчас будут условия когерентности для η)

Условия когерентности для η

▶ $u = \eta_{\mathbb{1}}$;

▶ $*_{A,B} \circ (\eta_A \otimes \eta_B) = \eta_{A \otimes B}$:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B & \xrightarrow{\eta_A \otimes \eta_B} & \mathcal{K}A \otimes \mathcal{K}B \\
 & \searrow \eta_{A \otimes B} & \downarrow *_{A,B} \\
 & & \mathcal{K}(A \otimes B)
 \end{array}$$

▶ $\tau_{A,B} = *_{A,B} \circ \eta_A \otimes id_{\mathcal{K}B}$;

▶ $\tau_{A,B} \circ id_A \otimes \eta_B = \eta_{A \otimes B}$:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B & \xrightarrow{id_A \otimes \eta_B} & A \otimes \mathcal{K}B \\
 & \searrow \eta_{A \otimes B} & \downarrow \tau_{A,B} \\
 & & \mathcal{K}(A \otimes B)
 \end{array}$$

Теоретико-категорная семантика.

Теорема

Корректность Пусть $\Gamma \vdash M : A$ и $M =_{\beta\eta} N$, тогда $\llbracket \Gamma \vdash M : A \rrbracket = \llbracket \Gamma \vdash N : A \rrbracket$

Интерпретация модальных правил:

$$\frac{\llbracket \Gamma \vdash M : A \rrbracket = \llbracket M \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \llbracket A \rrbracket}{\llbracket \Gamma \vdash \mathbf{pure} M : \mathbf{K}A \rrbracket := \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket M \rrbracket} \llbracket A \rrbracket \xrightarrow{\eta_{\llbracket A \rrbracket}} \mathcal{K}\llbracket A \rrbracket}$$

$$\llbracket \Gamma \vdash \vec{M} : \mathbf{K}\vec{A} \rrbracket = \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket \rangle : \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \prod_{i=1}^n \mathcal{K}\llbracket A_i \rrbracket \quad \llbracket \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B \rrbracket = \llbracket N \rrbracket : \prod_{i=1}^n \llbracket A_i \rrbracket \rightarrow \llbracket B \rrbracket$$

$$\llbracket \Gamma \vdash \mathbf{let pure} \vec{x} = \vec{M} \mathbf{in} M : \mathbf{K}B \rrbracket = \mathcal{K}(\llbracket N \rrbracket) \circ *_{\llbracket A_1 \rrbracket, \dots, \llbracket A_n \rrbracket} \circ \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket \rangle : \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \mathcal{K}\llbracket B \rrbracket$$

Теоретико-категорная семантика.

Лемма

Интерпретация сохраняет подстановку.

$$\llbracket M[x_1 := M_1, \dots, x_n := M_n] \rrbracket = \llbracket M \rrbracket \circ \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket \rangle.$$

Лемма

Интерпретация сохраняет редукцию.

Пусть $\Gamma \vdash M : A$ и $M \rightarrow_{\beta\eta} N$, тогда $\llbracket \Gamma \vdash M : A \rrbracket = \llbracket \Gamma \vdash N : A \rrbracket$;

Теоретико-категорная семантика. Пример.

$$1) \llbracket \Gamma \vdash \text{let pure } \vec{x} = \text{pure } \vec{M} \text{ in } N : KB \rrbracket = \llbracket \Gamma \vdash \text{pure } N[\vec{x} := \vec{M}] : KB \rrbracket$$

$$\llbracket \Gamma \vdash \text{let pure } \vec{x} = \text{pure } \vec{M} \text{ in } N : KB \rrbracket =$$

интерпретация

$$\mathcal{K}(\llbracket N \rrbracket) \circ *_{\llbracket A_1 \rrbracket, \dots, \llbracket A_n \rrbracket} \circ \langle \eta_{\llbracket A_1 \rrbracket} \circ \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \eta_{\llbracket A_n \rrbracket} \circ \llbracket M_n \rrbracket \rangle =$$

свойство пары морфизмов

$$\mathcal{K}(\llbracket N \rrbracket) \circ *_{\llbracket A_1 \rrbracket, \dots, \llbracket A_n \rrbracket} \circ (\eta_{\llbracket A_1 \rrbracket} \times \dots \times \eta_{\llbracket A_n \rrbracket}) \circ \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket \rangle =$$

по определению аппликативного функтора

$$\mathcal{K}(\llbracket N \rrbracket) \circ \eta_{\llbracket A_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket A_n \rrbracket} \circ \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket \rangle =$$

естественность η

$$\eta_{\llbracket B \rrbracket} \circ \llbracket N \rrbracket \circ \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket \rangle =$$

по лемме об одновременной подстановке

$$\eta_{\llbracket B \rrbracket} \circ \llbracket N[\vec{x} := \vec{M}] \rrbracket =$$

интерпретация

$$\llbracket \Gamma \vdash \text{pure } (N[\vec{x} := \vec{M}]) : KB \rrbracket$$

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

Эквивалентность на парах вида переменная-терм:

Определим такое бинарное отношение $\sim_{A,B} \subseteq \mathbb{V} \times \Lambda_K$, что:

$$(x, M) \sim_{A,B} (y, N) \Leftrightarrow x : A \vdash M : B \ \& \ y : A \vdash N : A \ \& \ M =_{\beta\eta} N[y := x].$$

Обозначим класс эквивалентности как $[x, M]_{A,B} = \{(y, N) \mid (x, M) \sim_{A,B} (y, N)\}$ (ниже мы будем опускать индексы).

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

Категория $\mathcal{C}(\lambda)$:

- ▶ $Ob_{\mathcal{C}} = \{\hat{A} \mid A \in \mathbb{T}\} \cup \{\mathbb{1}\}$;
- ▶ $Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B}) = (\mathbb{V} \times \Lambda_{\mathbf{K}}) / \sim_{A,B}$;
- ▶ Пусть $[x, M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B})$ и $[y, N] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{B}, \hat{C})$, тогда $[y, N] \circ [x, M] = [x, N[y := M]]$;
- ▶ Тожественный морфизм $id_{\hat{A}} = [x, x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{A})$;
- ▶ Терминальный объект $\mathbb{1}$;
- ▶ $\widehat{A \times B} = \hat{A} \times \hat{B}$;
- ▶ Каноническая проекция: $[x, \pi_i x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}_1 \times \hat{A}_2, \hat{A}_i)$ for $i \in \{1, 2\}$;
- ▶ $\widehat{A \rightarrow B} = \hat{B}^{\hat{A}}$;
- ▶ Вычисляющая стрелка $\epsilon = [x, (\pi_2 x)(\pi_1 x)] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{B}^{\hat{A}} \times \hat{A}, \hat{B})$.

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Необходимо показать, что \mathbf{K} – это аппликативный функтор над декартово замкнутой категорией $\mathcal{C}(\lambda)$.

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

Определим эндифунктор $\mathcal{K} : \mathcal{C}(\lambda) \rightarrow \mathcal{C}(\lambda)$ таким образом, что для любых $[x, M] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B})$, $\mathbf{K}([x, M]) = [y, \mathbf{let\ pure\ } x = y \mathbf{ in\ } M] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\lambda)}(\mathbf{K}\hat{A}, \mathbf{K}\hat{B})$ (обозначения: $fmap\ f$ для произвольной стрелки f).

Лемма

Функториальность

- ▶ $fmap\ (g \circ f) = fmap\ (g) \circ fmap\ (f)$;
- ▶ $fmap\ (id_{\hat{A}}) = id_{\mathbf{K}\hat{A}}$.

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

Определим естественные преобразования:

- ▶ $\eta : Id \Rightarrow \mathcal{K}$, такое, что $\forall \hat{A} \in Ob_{\mathcal{C}(\lambda)}$, $\eta_{\hat{A}} = [x, \mathbf{pure} x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \mathbf{K}\hat{A})$;
- ▶ $*_{A,B} : \mathbf{K}\hat{A} \times \mathbf{K}\hat{B} \rightarrow \mathbf{K}(\hat{A} \times \hat{B})$, такое, что $\forall \hat{A}, \hat{B} \in Ob_{\mathcal{C}(\lambda)}$, $*_{\hat{A},\hat{B}} = [p, \mathbf{let pure} x, y = \pi_1 p, \pi_2 p \mathbf{ in} \langle x, y \rangle] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\mathbf{K}\hat{A} \times \mathbf{K}\hat{B}, \mathbf{K}(\hat{A} \times \hat{B}))$.
- ▶ $\tau_{\hat{A},\hat{B}} = [p, \mathbf{let pure} x, y = \mathbf{pure} (\pi_1 p), \pi_2 p \mathbf{ in} \langle x, y \rangle]$

Лемма

\mathbf{K} Моноидальный функтор.

Лемма

Естественность и когерентность η .

Теоретико-категорная семантика. Полнота. Пример.

$$\tau_{\hat{A}, \hat{B}} \circ id_{\hat{A}} \times \eta_{\hat{B}} =$$

раскрытие

$$[q, \text{let pure } x, y = \text{pure } (\pi_1 q), \pi_2 q \text{ in } \langle x, y \rangle] \circ [p, \langle \pi_1 p, \text{pure } (\pi_2 p) \rangle] =$$

композиция

$$[p, \text{let pure } x, y = \text{pure } (\pi_1 q), \pi_2 q \text{ in } \langle x, y \rangle [q := \langle \pi_1 p, \text{pure } (\pi_2 p) \rangle]]$$

подстановка

$$[p, \text{let pure } x, y = \text{pure } (\pi_1 p), \text{pure } (\pi_2 p) \text{ in } \langle x, y \rangle] =$$

правило редукции

$$[p, \text{pure } (\langle x, y \rangle) [x := \pi_1 p, y := \pi_2 p]]$$

подстановка

$$[p, \text{pure } (\langle \pi_1 p, \pi_2 p \rangle)] =$$

 η -редукция

$$[p, \text{pure } p] =$$

определение η

$$\eta_{\widehat{A \times B}}$$

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

$$u_{\mathbb{1}} = [\blacksquare, \text{let pure } _ = _ \text{ in } \blacksquare].$$

Лемма

$$u_{\mathbb{1}} = \eta_{\mathbb{1}}$$

Лемма

- ▶ $fmap \alpha_{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}} \circ \tau_{\hat{A} \times \hat{B}, \hat{C}} = \tau_{\hat{A}, \hat{B} \times \hat{C}} \circ (id_{\hat{A}} \times \tau_{\hat{B}, \hat{C}}) \circ \alpha_{\hat{A}, \hat{B}, \mathbf{K}\hat{C}}$;
- ▶ $\mathbf{K}(R_{\hat{A}}) \circ \tau_{\mathbb{1}, \hat{A}} = R_{\mathbf{K}\hat{A}}$.

где $\alpha_{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}} = [p, \langle \pi_1(\pi_1 p), \langle \pi_2(\pi_1 p), \pi_2 p \rangle \rangle]$ и $R = \pi_2$.

Спасибо за внимание!

Черепашка ниндзя Донателло пишет представителя класса типов `Applicative`: