

**Теоремы геометрии:  
формулировки, доказательства, понимание**

**Георгий ШАБАТ**

**МГУ/МПГУ/РГГУ**

**Workshop "Конструктивное знание – 5":  
представление знаний**

**ИФ РАН, 14 марта 2018**

# Введение

Геометрия – одна из древнейших наук. Во все века её положения формулировались на наиболее формализованных из существующих языков, в двадцатом веке – на полностью формализованных.

Геометрия изучается в школах почти всех государств, и даже её весьма нетривиальные положения в принципе могут быть понятны широкой публике. В силу этих и других причин огромный корпус геометрических фактов, накопленных в течение тысячелетий, может показаться идеальным пробным материалом для отработки общих принципов представления научных знаний.

**Основной тезис:** *однако для "окончательной" фиксации геометрических знаний многие вопросы требуют продумывания.*

## Некоторые вопросы

- Что такое геометрия?
  - Границы между "элементарной" и "настоящей" геометрией?
  - Как геометрические истины соотносятся с проверяемыми фрагментами знаний о внешнем мире?
  - Какова природа чувства КРАСОТЫ геометрических теорем?
  - Связано ли это чувство красоты с УДИВЛЕНИЕМ?
  - Что представляет собой ПОНИМАНИЕ геометрической теоремы?
  - Как соотносится понимание теоремы с пониманием её доказательства?
  - На каких языках формулируются теоремы геометрии? -
  - Каковы взаимоотношения между этими языками? -
- \*\*\*\*\*

**Доклад:** полученные к настоящему времени неполные ответы математика-профессионала на поставленные вопросы.

Языковые аспекты этих ответов основаны на совместных работах докладчика с лингвистом Г.Е. Крейдлиным.

# Что такое геометрия?

Формально правильный ответ – один из древнейших разделов математики, прекрасно документированный от Евклида через Декарта-Паскаля до Гаусса-Римана-Гильберта-Тарского. А шире...

**Картина Мира:** есть Творец всего Сущего, и (почему-то) высший смысл нашего существования – *объединение людей в познании гармонии Мира.*

Искусства осуществляют это непостижимым образом, и не о них речь.

Высшая же (почему-то) цель наук – *проникновение в замысел Творца.*

Математикам в этом занятии отводится особая роль: мы непосредственно работаем с Истиной.

Геометрия же, особенно в её классическом понимании, уточняет взаимоотношения с Истиной: мы сравнительно успешно разбираемся в устройстве ПУСТОГО пространства, в котором мы (думаем, что) живём.

За две с половиной тысячи лет мы твёрдо усвоили по крайней мере две вещи:

- это пространство устроено *логично*;
- оно полно *чудес*, причём весьма легко наблюдаемых.

"Высшая" же геометрия – ВНУТРЕННЯЯ...

# Границы между "элементарной" и "настоящей" геометрией? И об удивлении/чудесах/понимании...

Пример:

**Теорема Понселе.** *Если пара окружностей является вписанной и описанной для какого-то треугольника, то она является таковой и для бесконечного множества треугольников.*

СМ. ДИНАМИЧЕСКИЙ ЧЕРТЁЖ

Объяснения:

- 1) Элементарное – связь с  $d^2 = R^2 - 2Rr$ . См. Г.Б.Ш.+А.И. Сгибнев, *Формула Эйлера и теорема Понселе*. Полином. 2009. N 2. С. 22-27
- 2) Взрослое – см. Phillip A. Griffiths, Joseph Harris, *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism*. L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. 2e Série. Volume: 24, 1978, pp. 31-40.

# Как геометрические истины соотносятся с проверяемыми фрагментами знаний о внешнем мире?

Классические чертежи.

Современные компьютерные эксперименты.

В эпоху всеобщего признания общей теории относительности **ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ – ГРУБАЯ ИНФИНИТИЗЕМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ** наблюдаемого пространства.

Сферическая геометрия лучше плоской??

# Какова природа чувства КРАСОТЫ геометрических теорем?

По рядам – книги Акопяна и Ефремова. Сокровищницы или  
НАГРОМОЖДЕНИЯ?

Внимание к стр. 55 Акопяна: *теорема о магеновде!*



# На каких языках формулируются теоремы геометрии? Каковы взаимоотношения между этими языками?

**Наши с Г.Е. Крейдлиным пять языков:**

- 1) Естественно-подобный;
- 2) Формальный язык инцидентности;
- 3) "Язык" чертежей;
- 4) Координатный язык;
- 5) Язык преобразований.

**Взаимоотношения:**

Work in progress...

Спасибо за внимание!