О соотношении языков синтетической и аналитической геометрии

Г.Б. Шабат

МПГУ (Московский Педагогический Государственный Университет),
РГГУ (Российский Государственный Гуманитарный Университет),
МГУ (Московский Государственный Университет)

Workshop
"Конструктивное знание – 8:
формальное представление математики"
Москва, ИФ РАН, 27 февраля 2019 г.

План доклада

0. Категорична ли геометрия?
1. Проективная плоскость
2. Синтетическая теория
3. Аналитическая теория
4. Связи между теориями
5. Обсуждение

0. Категорична ли геометрия?

НЕТ!!

Аргументы:
(1) Геометрия над $\mathbb{C}$ оказалась "физичнее" , чем над $\mathbb{R}$.
(2) Конечные геометрии, то есть над $\mathbb{F}_q$, интересны и важны как конечные модели теорий.
(3) Никто не знает, как будет выглядеть *некоммутативная алгебраическая геометрия*. Возможно, *непапповы плоскости* сыграют свою роль.
(4)...

1. Проективная плоскость

Будут фигурировать <u>две</u> формальные теории (исчисления предикатов 1-го порядка, дополненные несколькими нелогическими аксиомами), обладающие <u>моделями</u>

$$\mathbf{P}_2(\Bbbk),$$

где $\Bbbk$ – произвольное поле. Иногда полезно будет вспомнить для $\dim_{\Bbbk} \mathbf{V} = 3$

$$\mathbf{V} \setminus \{\vec{0}\} \longrightarrow \mathbf{P}_2(\Bbbk) : v \mapsto \underline{v}.$$

В обеих теориях главные действующие лица – точки проективной плоскости и *плоские алгебраические кривые*: прямые, коники, etc.

2. Синтетическая теория: синтаксис

Два основных **сорта:**
точки $A, B, C, ..., A_|, ... \in \Pi$
и
прямые $a, b, c, ..., a_|, ... \in \mathcal{L}$

Константы двух дополнительных сортов:
$\varnothing$ и Π: вся плоскость.

Два коммутативных **функционала** $^\bullet : \Pi \times \Pi \to \mathcal{L}$ и $_\bullet : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \Pi$ (доопределяются на диагоналях идемпотентно).

Предикаты: два сорта равенств и инцидентность.

Нелогические аксиомы: очевидные, Дезарга и Паппа.

2. Синтетическая теория: семантика

Интерпретации:

$$\Pi \leftrightarrow \mathbf{P}_2(\Bbbk),$$

$$\mathcal{L} \leftrightarrow \mathbf{P}_2^*(\Bbbk).$$

Функционалы $^\bullet$ и $_\bullet$ включаются в "meet-and-join" -решётку подпространств $\mathbf{V}$: для $\xi, \eta \in \mathrm{sub}(\mathbf{V})$

$$\underline{\xi}^\bullet \underline{\eta} := \underline{\langle \xi \bigcup \eta \rangle},$$

(пространство, порождённое объединением)

$$\underline{\xi}_\bullet \underline{\eta} := \underline{\xi \bigcap \eta}.$$

Инцидентность:

$$P \in \ell \Longleftrightarrow P^\bullet \ell = \ell \Longleftrightarrow P_\bullet \ell = P.$$

3. Аналитическая теория

Синтаксис: градуированная алгебра многочленов от x, y, z над полем. (Однородность плохо определяется в исчислении 1-го порядка, но можно либо определять её в ограниченных степенях, либо работать со всеми многочленами от x, y, доопределяя их "на бесконечной прямой").

Семантика: классическая теория плоских алгебраических кривых (Декарт, ... , НЬЮТОН).

4. Связи между теориями

От аналитической к синтетической. Здесь всё очевидно: прямые задаются уравнениями степени 1.

От синтетической к аналитической. Извлечение основного поля $\Bbbk$: см. Э. Артин, Геометрическая алгебра.

Коники на синтетическом языке: расширение синтаксиса.

$$\mathsf{col}(A, B, C) := [C \in A^\bullet B]$$

Теорема Паскаля (сокращаем $XY := X^\bullet Y$)

$$\mathsf{con}(A, B, C, D, E, F) := \mathsf{col}(AB_\bullet DE,\ BC_\bullet EF,\ CD_\bullet FA)$$

"Высшая" теорема Паскаля

Will Traves + David Wehlau, 2015: *Пусть дано множество 10 точек в общем положении, двумя способами разбитое на пятёрки*

$$\mathfrak{X} := \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5; B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\} =$$

$$= \{A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5; B'_1, B'_2, B'_3, B'_4, B'_5\}.$$

Тогда (при "достаточно алгебраически замкнутом $\Bbbk$")$\forall X$

$$\Big[[\mathsf{con}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, X) \vee \mathsf{con}(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, X)] \wedge$$

$$\wedge [\mathsf{con}(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5, X) \vee \mathsf{con}(B'_1, B'_2, B'_3, B'_4, B'_5, X)]\Big] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Big[[X \in \mathfrak{X}] \vee [X \in \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}]\Big].$$

В этих обозначениях $\mathsf{cub}(\mathfrak{X}) \iff \mathsf{con}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$.

Вывод

Видимо, соответствующие языки имеют (почти) одинаковую выразительную силу. Координатный язык чуть-чуть богаче: он пригоден для описания и неприведённых подсхем плоскости (впрочем, для нужд элементарной геометрии это вряд ли имеет значение).

Обобщения приведённых результатов потребуют некоторых усилий.

5. Обсуждение

Оба языка прекрасно формализованы, но трудны для восприятия человеком. Видимо, необходимы **языки-посредники.**

В соавторстве с лингвистом Г.Е. Крейдлиным докладчик работает над конгломератом 5 языков. Помимо рассмотренных сегодня, в них входят

- естественно-подобный;
- языки чертежей;
- язык преобразований.

Использования этих (и, возможно, других) языков в системе формального представления знаний, как можно более пригодного для понимания человеком – **одна из текущих задач.**