[2] Попов В. М. *Об одной трехзначной параполной логике.* Логические исследования, Вып. 9. М., Наука, 2002. С. 175–178.

Extra-Logical Proof-Theoretic Semantics in Homotopy Type Theory

Andrei Rodin (*Moscow and Saint-Petersburg*)

I. Kant famously argued that elementary geometrical statements such as Euclid's Triangle Angle Sum theorem cannot be deduced from the first principles by purely logical means because their proofs require extra-logical geometrical constructions [1, A719/B747]. The discovery of non-Euclidean geometries in the 19-th century made Kant's analysis of geometrical reasoning untenable in its original form, and throughout the following 20-th century it was generally viewed as fundamentally mistaken or at least wholly outdated. However the recently emerged Homotopy Type theory (HoTT) and the related program of building new "univalent" foundations of mathematics provide a formal and conceptual basis for revising, once again, the epistemic role and logical function of extra-logical constructions in mathematical (and other) proofs [2].

The key feature of HoTT, which modifies the intended logical semantics of Martin-Löf Type theory (MLTT) [3], is the homotopical cumulative hierarchy of types, which distinguishes between types of different homotopy levels. This hierarchy suggests a simple (albeit not uncontroversial) criterion of logicality according to which only types with at most one term qualify as propositions, and only applications of MLTT rules to propositions and their terms (proofs), that is, to judgements in the traditional sense of the term, qualify as logical inferences stricto sensu. According to the same criterion, applications of the same schematic rules to types and terms of higher homotopy levels are extra-logical constructions. Such extra-logical applications of deductive rules also have a proof-theoretic impact because the obtained non-propositional constructions serve as witnesses for associated propositions (formally obtained via the propositional truncation of higher types) in a manner similar to which elementary geometrical constructions support the traditional geometrical proofs. For this reason it is justified, in our view, to qualify the standard semantic of HoTT just outlined as proof-theoretic [4]. Using HoTT as a motivating example I further discuss the role of logical and extra-logical elements in formal proofs.

The work is supported by RFBR grant N19-011-00799

Bibliography

[1] Kant, Im. *Kritik der reinen Vernunft.* Meiner Verlag, Hamburg, 1998.

[2] Univalent Foundations Program *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics.* Institute for Advanced Study (Princeton), 2013

[3] Martin-Löf, P. *Intuitionistic Type Theory (Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980).* Napoli: BIBLIOPOLIS, 1984

[4] Piecha, Th. and Schröder-Heister, P. (eds.) *Advances in Proof-Theoretic Semantics*, Springer, 2016 (open access).

Существование рекурсивно перечислимой полной по Крипке нормальной модальной предикатной логики, которая не полна относительно первопорядково определимых классов шкал

Рыбаков М. Н., Шкатов Д. П. (*Тверь, Йоханнесбург*)

Известно [2, 6, 7], что модальные предикатные логики, полные относительно первопорядково определимых классов шкал Крипке, являются рекурсивно перечислимыми, и следовательно, рекурсивно аксиоматизируемыми: используя стандартный перевод модальных формул в классические и соответствующее элементарное условие для шкал, можно построить эффективное погружение такой логики в классическую логику предикатов с равенством. Это наблюдение справедливо не только для нормальных, но и для квазинормальных, и для ненормальных модальных логик [3], причём результат останется справедливым и в том случае, когда условия первого порядка будут наложены и на предметные области миров. В то же время имеется много примеров полных по Крипке модальных предикатных логик, классы шкал Крипке которых не определяются элементарными условиями, а сами логики не являются рекурсивно перечислимыми: это логики конечных моделей, логики шкал логик доказуемости Гёделя–Лёба и Гжегорчика и их расширения, логики с модальностями типа всеобщего знания в случае логик знания, логик с универсальной модальностью, логик с итерацией в случае динамических логик, логик с различными сочетаниями темпоральных операторов в случае временных логик, и др.; см., например, [1, 4, 5, 8, 11, 12].

Возникает естественный вопрос: всегда ли полная по Крипке рекурсивно перечислимая логика полна относительно некоторого класса шкал, задаваемого элементарным условием?

Некоторое время назад ответ на этот вопрос был получен для случая квазинормальных логик: был приведён пример полной по Крипке рекурсивно перечислимой квазинормальной модальной логики, которая не полна относительно классов шкал, определяемых условием первого порядка [9, 10]. При этом условие отсутствия замкнутости логики по правилу Гёделя было существенным: если в приведённом примере вместо логики корня построенной шкалы рассмотреть логику всей шкалы, то получим нормальную модальную логику, которая уже не будет рекурсивно перечислимой.

Тем не менее, дальнейшее исследование вопроса показало, что в классе нормальных модальных предикатных логик тоже имеются логики с подоб-