Е.В. Борисов
Томский государственный университет

ЛОГИКА ДЛЯ КРОСС-МИРОВОЙ ПРЕДИКАЦИИ

Актуальные проблемы логики и философии науки
Томск, 14 октября 2020

Проблема кросс-мировой предикации

Контекст, в котором возникает проблема:

- модально-логическая формализация рассуждений с использованием модальных выражений,
- реляционная интерпретация модальной логики (семантика возможных миров).

Проблема состоит в том, что предложения с кросс-мировой предикацией не допускают адекватной формализации с использованием стандартной реляционной семантики. Критерий адекватности: отображение интуитивных истинностных условий.

Проблема на примере

(1) Джон выше Мэри в мире w.

(2) Джон, каков он в w_1, выше Мэри, какова она в w_2.

(1) – это <u>внутримировое</u> отношение между Джоном и Мэри: оно имеет место «внутри» мира w;
(2) – это <u>кросс-мировое</u> отношение между Джоном и Мэри.

Проблема: стандартная модальная семантика не отображает кросс-мировые отношения.

Примеры кросс-мировой предикации

Джон мог быть выше.

Джон мог быть выше, чем Мэри, как она есть.

Джон был богаче, чем когда-либо прежде.

Я думал, ваша яхта больше.

Джону следовало бы быть повежливее.

Определение кросс-мировой предикации

$o_1, \ldots, o_n$ – объекты,
$w_1, \ldots, w_n$ – возможные миры,
R – n-местное отношение.

Кросс-мировая предикация – это утверждения следующей формы:

o_1, каков он в w_1, …, o_n, каков он в w_n, находятся в отношении R.

Цель доклада

Я представляю логику, пригодную для формализации модальных рассуждений с кросс-мировой предикацией – ***CPL*** (cross-world predication logic).

CPL – это модальная логика первого порядка с равенством.

CPL включает в себя реляционную семантику с кросс-мировой интерпретацией предикатов и метод табличного доказательства, корректный и полный относительно данной семантики.

В докладе излагается семантика.

Главная семантическая новация CPL (предварительно)

$x_1, \ldots, x_n$ – переменные, v – валюация переменных, $(\forall i)v(x_i) = o_i$; w – возможный мир; R – предикат; I – интерпретация предикатов.

В стандартной семантике:
$R(x_1, \ldots, x_n)$ истинно относительно w и v тттк
$\langle o_1, \ldots, o_n\rangle \in I(R)(w)$

В семантике CPL:
$R(x_1, \ldots, x_n)$ истинно относительно $\langle w_1, \ldots, w_n\rangle$ и v тттк
$\langle o_1, \ldots, o_n\rangle \in I(R)(w_1, \ldots, w_n)$, т.е.:
o_1 в $w_1, \ldots, o_n$ в w_n, находятся в отношении $I(R)$.

Как формируются кортежи миров?

$R(x_1, \ldots, x_n)$ истинно относительно $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ и v тттк $\langle o_1, \ldots, o_n \rangle \in I(R)(w_1, \ldots, w_n)$

Кортеж объектов $\langle o_1, \ldots, o_n \rangle$ определен переменными и валюацией переменных: $\langle o_1, \ldots, o_n \rangle = \langle v(x_1), \ldots, v(x_n) \rangle$

Кортеж миров задается аналогично: переменными и специальной функции от переменных к мирам – ***VP-функцией*.**

$R(x_1, \ldots, x_n)$ истинно относительно v и VP-функции f тттк $\langle v(x_1), \ldots, v(x_n) \rangle \in I(R)(f(x_1), \ldots, f(x_n))$

In a nutshell

В CPL переменные в атомарной формуле выполняют двойную работу:

- посредством валюации преименных задают кортеж объектов;
- посредством VP-функции задают кортеж миров.

$R\,(x,\ y)$

Джон w_1 Мэри w_2

$v(x) =$ Джон, $v(y) =$ Мэри, $f(x) = w_1$, $f(y) = w_2$.

Главная семантическая новация CPL

В стандартной семантике формулы оцениваются на истинность с учетом модели, возможного мира и валюации переменных. В семантике CPL, помимо перечисленных факторов, учитывается дополнительный фактор – ***VP-функция***.

VP-функция – это *частичная* функция от переменных к возможным мирам.

Нотация:
$M, w, f \vDash_v \varphi$ означает: формула φ истинна в мире w модели M относительно VP-функции f и валюации переменных v.
(В дальнейшем «M» опускается.)

Литература

Главный источник:
Butterfield J., Stirling C. Predicate Modifiers in Tense Logic. In: Logique et Analyse. 1987. Vol. 30. № 117/118. P. 31-50.
Здесь представлена идея ассоциировать переменные с мирами.
CPL основана на модификации этой идеи.

Эта идея разработывается также в двумерной семантике (K. Segerberg, L. Humberstone, R. Stalnaker, K. Wehmeier и др.)

CPL имеет ряд преимуществ перед семантикой Баттерфилда – Стерлинга и двумерной семантикой по выразительной силе и простоте формального языка.

Язык CPL (L) имеет следующие особенности:

1) ***L*** содержит только 2 вида термов – переменные и константы.

2) ***L*** содержит λ-оператор. Пусть x – переменная, t – терм, φ – формула; тогда (λx.φ) – предикат, (λx.φ)(t) – формула. Чтобы облегчить формулы для визуального восприятия, я пишу (λx.φ)(t) как (t/x)φ.

3) В формулах ***L*** индивидные константы комбинируются с предикатами только посредством λ-операторов. Например, вместо Pa следует писать (a/x)Px.

Дефиниция 1 (модель для L)

Модель M для языка ***L*** представляет собой упорядоченную четверку <G, R, D, I >, где

G – непустое множество возможных миров;

R – бинарное отношение на G (отношение достижимости);

D – доменная функция, назначающая каждому возможному миру w непустой класс объектов D(w) (домен w);

I – интерпретация индивидных констант и предикатов.

Интерпретация I индивидных констант и предикатов:

1) Пусть a – индивидная константа, тогда I(a) – это функция G $\rightarrow$ D(M) (от миров к объектам из домена модели).
Для любого мира w, $I(a)(w) \in D(M)$.

2) Пусть Q – n-местный предикат ($n \geq 1$), тогда I(Q) – это функция $G^n \rightarrow \boldsymbol{P}(D(M)^n)$, где $\boldsymbol{P}(\ldots)$ – булеан. Т.е. I(Q) задает экстенсионал Q для *упорядоченных n-ок возможных миров*: в этом состоит *кросс-мировая интерпретация предикатов*.
Для любых миров $w_1, \ldots, w_n$, $I(Q)(< w_1, \ldots, w_n >) \subseteq D(M)^n$.

3) Для любых миров w и w′, I(=)(w, w′) – это отношение тождества на D(M).

Две ***онтологические особенности*** моделей для ***L***:

1) один и тот же индивид может входить в домены нескольких (или даже всех) миров (в этой семантике ***не*** используется онтология двойников в смысле Льюиса);

2) модели для ***L*** – это модели с переменным доменом: индивид может существовать в некоторых мирах и не существовать в остальных.

Формирование VP-функций в ходе истинностной оценки формулы (упрощенное описание)

1) В начале эвалюации в качестве VP-функции берется пустое множество ($\emptyset$).

2) Мы добавляем к VP-функциям упорядоченные пары вида <переменная, возможный мир> при обработке операторов, связывающих переменные. Например, при обработке $\exists x$, $\forall x$ или (t/x) относительно мира w и VP-функции f, мы переходим от f к $f \cup \{<x, w>\}$.

Дефиниция истины в модели

Полная дефиниция истины будет дана ниже. Сейчас, чтобы проиллюстрировать использование VP-функций, я принимаю <u>упрощенную и неполную</u> дефиницию.

Упрощенная дефиниция истины

1. Пункт для атомарных формул:

$w, f \vDash_v Qx_1 \ldots x_n$ тттк $\langle v(x_1), \ldots v(x_n)\rangle \in I(Q)(f(x_1), \ldots f(x_n))$

Интуитивный смысл правой части: <u>объект $v(x_1)$ в мире $f(x_1)$</u>, …, <u>объект $v(x_n)$ в мире $f(x_n)$</u> находятся в отношении I(Q).
Пример: <Иван, Марья> ∈ I(Выше)(w, w') означает:
Иван в мире w выше, чем Марья в мире w'.

2. $w, f \vDash_v (t/x)\varphi$ тттк $w, f \cup \{<x, w>\} \vDash_{v[e/x]} \varphi$.

3. $w, f \vDash_v (\exists x)\varphi$ тттк $(\exists e \in D(w))$ $w, f \cup \{<x, w>\} \vDash_{v[e/x]} \varphi$.

Аналогично для $\forall$.

4. Для $\Diamond$: $w, f \vDash_v \Diamond\varphi$ тттк $(\exists w' \in G)$ wRw' и $w', f \vDash_v \varphi$.

Аналогично для $\Box$.

Пример 1. ***Джон мог быть богаче.***

Пусть I(j)(w) = I(j)(w') = Джон.

$w, \emptyset \vDash_{v} (j/x)\Diamond(x/y)Q(y, x)$

тттк $w, \{<x, w>\} \vDash_{v[\text{Джон}/x]} \Diamond(x/y)Q(y, x)$

тттк $(\exists w')\, wRw' \,\&\, w', \{<x, w>\} \vDash_{v[\text{Джон}/x]} (x/y)Q(y, x)$

тттк $(\exists w')\, wRw' \,\&\, w', \{<x, w>, <y, w'>\} \vDash_{v[\text{Джон}/x][\text{Джон}/y]} Q(y, x)$

тттк $(\exists w')\, wRw' \,\&\, <\text{Джон}, \text{Джон}> \in I(Q)(w', w)$.

Пример 2. ***Джон был богаче, чем когда-либо прежде.***

Модифицируем язык и семантику CPL в духе ***темпоральной*** логики.

Возможные миры понимаются как моменты времени;
t – время эвалюоации;
< – отношение «раньше» (отношение достижимости между моментами времени).

P и H – темпоральные операторы с интуитивным смыслом «однажды в прошлом» (P) и «всегда в прошлом» (H).

Джон был богаче, чем когда-либо прежде.

$t, \emptyset \vDash_v P(j/x)H(x/y)Q(x, y)$

тттк $(\exists t'<t)\ t', \emptyset \vDash_v (j/x)H(x/y)Q(x, y)$

тттк $(\exists t'<t)\ t', \{<x, t'>\} \vDash_{v[Джон/x]} H(x/y)Q(x, y)$

тттк $(\exists t'<t)(\forall t''<t')\ t'', \{<x, t'>\} \vDash_{v[Джон/x]} (x/y)Q(x, y)$

тттк $(\exists t'<t)(\forall t''<t')\ t'', \{<x, t'>, <y, t''>\} \vDash_{v[Джон/x][Джон/y]} Q(x, y)$

тттк $(\exists t'<t)(\forall t''<t')\ <Джон, Джон> \in I(Q)(t', t'')$.

Пример 3.

Некогда Джон был богаче, чем кто-либо когда-либо прежде.

$t, \emptyset \vDash_v P(j/x)H(\forall y)Q(x, y)$

тттк $(\exists t'<t)\ t', \emptyset \vDash_v (j/x)H(\forall y)Q(x, y)$

тттк $(\exists t'<t)\ t', \{<x, t'>\} \vDash_{v[\text{Джон}/x]} H(\forall y)Q(x, y)$

тттк $(\exists t'<t)(\forall t''<t')\ t'', \{<x, t'>\} \vDash_{v[\text{Джон}/x]} (\forall y)Q(x, y)$

тттк $(\exists t'<t)(\forall t''<t')(\forall e \in D(t''))$

$t'', \{<x, t'>, <y, t''>\} \vDash_{v[\text{Джон}/x][e/y]} Q(x, y)$

тттк $(\exists t'<t)(\forall t''<t')(\forall e \in D(t''))\ <\text{Джон}, e> \in I(Q)(t', t'')$

Нотация для полной дефиниции истины в модели

Пусть v – валюация переменных, $e \in D(M)$; тогда $v[e/x]$ – это x-вариант v, такой что $v[e/x](x) = e$.

Если t – терм, а w – возможный мир, то $vI(t)$ – это функция $G \rightarrow D(M)$, такая что $vI(t)(w) = v(t)$, если t – переменная, и $vI(t)(w) = I(t)(w)$, если t – константа.

Пусть f – VP-функция, x – переменная, w – возможный мир; тогда $f+<x, w> =_{df} (f - (\{x\} \times G)) \cup \{<x, w>\}$.

Пусть f – VP-функция, w – возможный мир. Тогда f*w $=_{df}$ f ∪ ((Var – Dom(f)) × {w}), где Var – множество переменных ***L***, Dom(f) – домен f.

Дефиниция истины в модели

Пусть M = <G, R, D, I> – модель для ***L***, w – возможный мир в G, f – VP-функция, v – валюация переменных, φ и ψ – формулы, P – n-местный предикат, x, x_1, …, x_n – переменные, t – терм.

(1) $w, f \vDash_v Px_1 \ldots x_n$ тттк
$\langle v(x_1), \ldots v(x_n)\rangle \in I(P)(\langle f^*w(x_1), \ldots f^*w(x_n)\rangle)$

(2) $w, f \vDash_v x_1 = x_2$ тттк $v(x_1) = v(x_2)$

(3) $w, f \vDash_v \sim\varphi$ тттк $w, f \nvDash_v \varphi$.

(4) $w, f \vDash_v \varphi \& \psi$ тттк $w, f \vDash_v \varphi$ и $w, f \vDash_v \psi$.
Аналогично для других бинарных связок.

(5) $w, f \vDash_v (\exists x)\varphi$ тттк $(\exists e \in D(w))\ w, f+\langle x, w\rangle \vDash_{v[e/x]} \varphi$.
Аналогично для $(\forall x)$.

(6) $w, f \vDash_v (t/x)\varphi$ тттк $w, f+\langle x, w\rangle \vDash_{v[vI(t)(w)/x]} \varphi$.

(7) $w, f \vDash_v \Diamond\varphi$ тттк $(\exists w' \in G)\ wRw'$ и $w', f \vDash_v \varphi$.
Аналогично для $\Box$.

Пример 4 (с пустой квантификацией и свободной переменной)

$t, \emptyset \vDash_{v} (a/x)P(\exists x)PQ(x, y)$

тттк $\quad t, \{<x, t>\} \vDash_{v[I(a)(t)/x]} P(\exists x)PQ(x, y)$

тттк $\quad (\exists t') \, t<t' \;\&\; t', \{<x, t>\} \vDash_{v[I(a)(w)/x]} (\exists x)PQ(x, y)$

тттк $\quad (\exists t') \, t<t' \;\&\; (\exists e \in D(t'))$
$t', \{<x, t'>\} \vDash_{v[I(a)(t)/x][e/x]} PQ(x, y)$

тттк $\quad (\exists t') \, t<t' \;\&\; (\exists e \in D(t')) \; (\exists t''<t')$
$t'', \{<x, t'>\} \vDash_{v[I(a)(t)/x][e/x]} Q(x, y)$

тттк $(\exists t')\ t<t' \ \&\ (\exists e \in D(t'))\ (\exists t''<t')$
$t'', \{<x, t'>\} \vDash_{v[I(a)(t)/x][e/x]} Q(x, y)$

тттк $(\exists t')\ t<t' \ \&\ (\exists e \in D(t'))\ (\exists t''<t')$
$<u(x), u(y)> \in I(Q)(f^*t''(x), f^*t''(y))$,

где $u = v[I(a)(t)/x][e/x]$; $f = \{<x, t'>\}$

тттк $(\exists t')\ t<t' \ \&\ (\exists e \in D(t'))\ (\exists t''<t')$
$<e, v(y)> \in I(Q)(t', t'')$.

Преимущества CPL

1) В семантике Баттерфилда – Стерлинга можно выразить «Джон богаче, чем когда-либо прежде», но нельзя «Джон был богаче, чем когда-либо прежде». В CPL некоторые ограничения такого рода устранены.
2) Двумерная семантика допускает кросс-мировую интерпретацию только для двухместных предикатов; CPL – для предикатов любой местности.
3) Все известные мне версии кросс-мировой семантики используют формальный язык с нестандартными операторами; CPL базируется на стандартном языке.
4) CPL включает в себя не только семантику, но и метод табличного доказательства, адекватный опианной семантике.

Спасибо за внимание!