Нечёткая теория типов в анализе аргументации

О. Доманов,
Институт философии и права СО РАН

Томск, 13 октября 2020 г.

Задача

- Аргументация это деятельность по убеждению аудитории путём приведения рациональных аргументов.
- Убеждение редко бывает полным. Часто аудитория более или менее убеждена.
- Аргументы могут иметь разную силу.
- Утверждения могут иметь разную степень убедительности (для разных аудиторий).

Идея

- Аргументы имеют форму правил вывода.
  Например:
  - P — эксперт.
  - P утверждает A.
  - Если эксперт утверждает A, то A убедительно.
  - Следовательно A убедительно.
- Теоретико-типовой подход является более естественным для анализа аргументации, чем традиционно применяемые логики.
- Требуется расширить теорию типов, учтя степени убедительности.

Нечёткая логика

- Алгебра истинностных значений — полная решётка. Интерпретируем как алгебру убедительности.
- Двуместная операция t-норма, $\otimes$:
  - коммутативна и ассоциативна;
  - неубывающая по обоим аргументам, то есть повышение убедительности любой посылки не должно приводить к понижению убедительности вывода;
  - для любых x выполнены равенства: $x \otimes \bot = \bot$ и $x \otimes \top = x$.
- Три t-нормы, определённые на единичном вещественном интервале $[0, 1]$:
  - Норма Лукасевича: $x \otimes y = \max(0, x + y - 1)$.
  - Норма Гёделя: $x \otimes y = \min(x, y)$.
  - Норма произведения: $x \otimes y = xy$.

Нечёткая логика (2)

- t-норма является обобщением конъюнкции (аргументов).
- Нечёткий modus ponens:
  Если
  $$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$
  то $[\![B]\!] = [\![A]\!] \otimes [\![A \to B]\!]$.
- Обобщаем этот способ на все правила вывода.

Алгебра (степеней) убедительности

Формально, алгебра убедительности это алгебра $\langle L, \wedge, \vee, \otimes \Rightarrow, \bot, \top\rangle$, где

- $\langle L, \wedge, \vee, \bot, \top\rangle$ — полная решётка с инфимумом $\wedge$, супремумом $\vee$, минимальным и максимальным элементами $\bot$ и $\top$; будем обозначать порядок решётки $\leqslant$;
- $\langle L, \otimes, \top\rangle$ — коммутативная полугруппа с единицей (моноид); это означает, что $\otimes$ является двуместной коммутативной и ассоциативной операцией, такой, что $x \otimes \top = x$ для любого x;
- для любых x, y, z можно определить двуместную операцию $\Rightarrow$, такую, что

$$z \leqslant (x \Rightarrow y) \text{ тогда и только тогда, когда } x \otimes z \leqslant y.$$

Обозначения

(Я опираюсь на HoTTBook)

- $[\![A]\!]$ — степень убедительности A.
- $a \,|\, \alpha : A$ — со степенью убедительности α можно утверждать, что a является элементом (термом) типа A
  (для пропозиций: a является доводом в пользу пропозиции A со степенью убедительности α).
- Иерархия универсумов: $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$

Обозначения (2)

- Основные типы суждений:

$$\Gamma \text{ ctx} \qquad \Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A \qquad \Gamma \vdash a \equiv a' \,|\, \alpha : A$$

- Контекст:

$$x_1 \,|\, \alpha_1 : A_1, x_2 \,|\, \alpha_2 : A_2, \dots, x_n \,|\, \alpha_n : A_n$$

- Как видно, мы не рассматриваем случай нечёткого отнесения типов к универсуму типов.
  В нашей формализации как тип, так и термы (объекты) чётки, а вся нечёткость содержится в отнесении термов к типам (т. е. в интерпретации).
  Поэтому, в частности, правила формирования типов вида X-form ниже не содержат указаний на степени убедительности.
- $a : A \coloneqq a \,|\, \top : A$.
- Для пропозиций:

$$[\![A \;\; \text{true}]\!] = \bigvee_x [\![x : A]\!].$$

Тип функций

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (\Pi x : A)\, B : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b \,|\, \beta : B}{\Gamma \vdash \lambda(x : A)\, b \,|\, \bigwedge_x \beta(x) : (\Pi x : A)\, B}\ \Pi\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f \,|\, \_ : (\Pi x : A)\, B \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A}{\Gamma \vdash f(a) \,|\, [\![f(a)]\!] \otimes \alpha : B[a/x]}\ \Pi\text{-ELIM}$$

- Π-INTRO соответствует пониманию степени как «минимальной».
- Π-ELIM соответствует modus ponens.

Тип пар

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (\Sigma x : A)\, B : \mathcal{U}_i}\ \Sigma\text{-FORM}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A \qquad \Gamma \vdash b \,|\, \beta : B}{\Gamma \vdash (a \,|\, \alpha, b \,|\, \beta) \,|\, \alpha \otimes \beta : (\Sigma x : A)\, B}\ \Sigma\text{-INTRO}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : (\Sigma x : A)\, B \vdash C : \mathcal{U}_i \\ \Gamma, x : A, y : B \vdash g \,|\, \gamma : C[(x, y)/z] \\ \Gamma \vdash p \,|\, \_ : (\Sigma x : A)\, B\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{(\Sigma x : A)\, B}(z.C, x.y.g, p) \,|\, \gamma \otimes h : C[p/z]}\ \Sigma\text{-ELIM}$$

Функция h:

$$h(x)(y) = \begin{cases} [\![x]\!] \otimes [\![y]\!] & \text{если } g \text{ зависит как от } x\text{, так и от } y, \\ [\![x]\!] & \text{если } g \text{ зависит только от } x, \\ [\![y]\!] & \text{если } g \text{ зависит только от } y, \\ \top & \text{если } g \text{ не зависит от } x \text{ и } y. \end{cases}$$

Тип пар (2)

Например, в частном случае первой проекции имеем $g(x)(y) = x$, $h(x)(y) = [\![x]\!]$, и тогда правило имеет вид:

$$\frac{\Gamma, z : (\Sigma x : A)\,B \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x : A, y : B \vdash x : A \qquad \Gamma \vdash (a\,|\,\alpha, b\,|\,\beta)\,|\,\_ : (\Sigma x : A)\,B}{\Gamma \vdash a\,|\,\alpha : A}\;.$$

Здесь первые две посылки выполняются в силу других правил, и их в данном случае можно было бы опустить:

$$\frac{\Gamma \vdash (a\,|\,\alpha, b\,|\,\beta)\,|\,\_ : (\Sigma x : A)\,B}{\Gamma \vdash a\,|\,\alpha : A}\;.$$

Кроме того,

$$[\![(\Sigma x : A)\,\mathbb{1}\ \mathsf{true}]\!] = \bigvee_{x\,:\,A} [\![x]\!] = [\![A\ \mathsf{true}]\!].$$

Тип копроизведения (дизъюнктивной суммы)

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A + B : \mathcal{U}_i} \text{+-FORM}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \\ \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{inl}(a) \,|\, \alpha : A + B} \text{+-INTRO}_1$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \\ \Gamma \vdash b \,|\, \beta : B\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{inr}(b) \,|\, \beta : A + B} \text{+-INTRO}_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \\ \Gamma, x : A \vdash c \,|\, \gamma : C[\mathsf{inl}(x)/z] \\ \Gamma, y : B \vdash d \,|\, \delta : C[\mathsf{inr}(y)/z] \\ \Gamma \vdash e \,|\, \epsilon : A + B\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e) \,|\, \epsilon \otimes h(e) : C[e/z]} \text{+-ELIM}$$

Тип копроизведения (дизъюнктивной суммы) (2)

здесь

$$\mathrm{ind}_{A+B}(C, c, d, e) = \begin{cases} c(a) & \text{при } e = \mathrm{inl}(a) \\ d(b) & \text{при } e = \mathrm{inr}(b) \end{cases}$$

$$h(e) = \begin{cases} [\![a]\!] & \text{при } e = \mathrm{inl}(a) \\ [\![b]\!] & \text{при } e = \mathrm{inr}(b) \end{cases}$$

Спасибо !

DOMANOV@PHILOSOPHY.NSC.RU