

Доказательство

в контексте соответствия Карри-Говарда
в классической и современной перспективе

Ламберов Лев Дмитриевич
`lev.lamberov@urfu.ru`

Уральский федеральный университет

14 октября 2020 г.

- Соответствие Карри-Говарда — нетривиальная связь логики и типизированных вычислений

- Соответствие Карри-Говарда — нетривиальная связь логики и типизированных вычислений
 - интуиционистская логика — просто типизированное лямбда-исчисление
 - классическая логика — вычисления в стиле передачи продолжений
 - линейная логика — лямбда-исчисление, моделирующее потребление ресурсов
 - ...

- Интуиционистская логика — логика «с человеческой точки зрения»

ВНК-интерпретация

- Интуиционистская логика — логика «с человеческой точки зрения»
- ВНК-интерпретация в честь Л. Э. Я. Брауэра, А. Гейтинга и А. Н. Колмогорова

ВНК-интерпретация

- Интуиционистская логика — логика «с человеческой точки зрения»
- ВНК-интерпретация в честь Л. Э. Я. Брауэра, А. Гейтинга и А. Н. Колмогорова
- ВНК-интерпретация даётся в терминах доказательств, задач и решений

ВНК-интерпретация

- Интуиционистская логика — логика «с человеческой точки зрения»
- ВНК-интерпретация в честь Л. Э. Я. Брауэра, А. Гейтинга и А. Н. Колмогорова
- ВНК-интерпретация даётся в терминах доказательств, задач и решений
- Высказывание истинно, если для него имеется доказательство
- Высказывание ложно, если для него имеется опровержение

«Прямые» и «непрямые» доказательства

- Значения логических терминов определяются «прямым» доказательством высказывания, получаемого с помощью данного логического термина, а также тем, как использовать существующее доказательство в «непрямом» доказательстве другого высказывания

«Прямые» и «непрямые» доказательства

- Значения логических терминов определяются «прямым» доказательством высказывания, получаемого с помощью данного логического термина, а также тем, как использовать существующее доказательство в «непрямом» доказательстве другого высказывания
- Принадлежность термина t типу $T — t : T$

«Прямые» и «непрямые» доказательства

- Значения логических терминов определяются «прямым» доказательством высказывания, получаемого с помощью данного логического термина, а также тем, как использовать существующее доказательство в «непрямом» доказательстве другого высказывания
- Принадлежность термина t типу $T — t : T$
- t — терм-доказательство или объект-доказательство

Динамика и статика доказательства

- Динамика доказательства явно видна при использовании подхода А. Н. Колмогорова

Динамика и статика доказательства

- Динамика доказательства явно видна при использовании подхода А. Н. Колмогорова
- Принцип Г. Генцена: правила удаления являются обратными по отношению к правилам введения

Динамика и статика доказательства

- Динамика доказательства явно видна при использовании подхода А. Н. Колмогорова
- Принцип Г. Генцена: правила удаления являются обратными по отношению к правилам введения
 - 1 доказательство, построенное с помощью правил введения, сохраняет информацию, которая в дальнейшем может быть «восстановлена» с помощью правил удаления
 - 2 доказательство является обратимым и может быть «восстановлено» обратно, используя информацию, полученную с помощью правил удаления

Динамика и статика доказательства

- Динамика доказательства явно видна при использовании подхода А. Н. Колмогорова
- Принцип Г. Генцена: правила удаления являются обратными по отношению к правилам введения
 - 1 доказательство, построенное с помощью правил введения, сохраняет информацию, которая в дальнейшем может быть «восстановлена» с помощью правил удаления
 - 2 доказательство является обратимым и может быть «восстановлено» обратно, используя информацию, полученную с помощью правил удаления
- Динамика: правила аналогичны вычислительным процедурам

Динамика и статика доказательства

- Динамика доказательства явно видна при использовании подхода А. Н. Колмогорова
- Принцип Г. Генцена: правила удаления являются обратными по отношению к правилам введения
 - 1 доказательство, построенное с помощью правил введения, сохраняет информацию, которая в дальнейшем может быть «восстановлена» с помощью правил удаления
 - 2 доказательство является обратимым и может быть «восстановлено» обратно, используя информацию, полученную с помощью правил удаления
- Динамика: правила аналогичны вычислительным процедурам
- Статика: формы высказываний аналогичны (типизированным) термам

- Теоретико-типовой подход позволяет обнаружить «вертикальное единство» логического

Понятие логического

- Теоретико-типовой подход позволяет обнаружить «вертикальное единство» логического
- Зависимая сумма: выражение с квантором существования соответствует паре из объекта и сертификата, что этот объект выполняет выражение в области действия квантора

Понятие логического

- Теоретико-типовой подход позволяет обнаружить «вертикальное единство» логического
- Зависимая сумма: выражение с квантором существования соответствует паре из объекта и сертификата, что этот объект выполняет выражение в области действия квантора
- Тип произведения является частным случаем типа зависимых сумм, значит конъюнкция является частным случаем выражения с квантором существования

Понятие логического

- Теоретико-типовой подход позволяет обнаружить «вертикальное единство» логического
- Зависимая сумма: выражение с квантором существования соответствует паре из объекта и сертификата, что этот объект выполняет выражение в области действия квантора
- Тип произведения является частным случаем типа зависимых сумм, значит конъюнкция является частным случаем выражения с квантором существования
- Зависимое произведение: выражение с квантором общности соответствует функции, превращающий любой объект в доказательство того, что этот объект выполняет выражение в области действия квантора

Понятие логического

- Теоретико-типовой подход позволяет обнаружить «вертикальное единство» логического
- Зависимая сумма: выражение с квантором существования соответствует паре из объекта и сертификата, что этот объект выполняет выражение в области действия квантора
- Тип произведения является частным случаем типа зависимых сумм, значит конъюнкция является частным случаем выражения с квантором существования
- Зависимое произведение: выражение с квантором общности соответствует функции, превращающий любой объект в доказательство того, что этот объект выполняет выражение в области действия квантора
- Тип функции является частным случаем типа зависимых произведений, значит импликация является частным случаем выражения с квантором общности

Доктрина «высказывания как типы»

- Х. Карри, 1934, 1958
- У. А. Говард, 1980 (на самом деле раньше)
- Н. Г. де Брёйн, 1983 (на самом деле раньше)

Доктрина «высказывания как типы»

- Х. Карри, 1934, 1958
- У. А. Говард, 1980 (на самом деле раньше)
- Н. Г. де Брёйн, 1983 (на самом деле раньше)
- + теория категорий
- Соответствие Карри-Говарда-Ламбека или «вычислительное триединство»

Доктрина «высказывания как некоторые типы»

- Обновлённый взгляд на связь логики, типизированных вычислений и категорий
- Высказывания являются типами строго определённого вида, остальные типы «напрямую» высказываниями не являются

Доктрина «высказывания как некоторые типы»

- Обновлённый взгляд на связь логики, типизированных вычислений и категорий
- Высказывания являются типами строго определённого вида, остальные типы «напрямую» высказываниями не являются
- ГТТ: высказывания соответствуют типам с не более чем одним термом

Доктрина «высказывания как типы» и суждения

- Всякое высказывание соответствует некоторому типу, доказательства данного высказывания — термам данного типа

Доктрина «высказывания как типы» и суждения

- Всякое высказывание соответствует некоторому типу, доказательства данного высказывания — термам данного типа
- П. Мартин-Лёф: четыре формы суждения:
 - 1 A является множеством (=типом)
 - 2 множество (=тип) A равен множеству (=типу) A
 - 3 a является элементом (=термом) множества (=типа) A
 - 4 a и b являются равными элементами (=термами) множества (=типа) A

Доктрина «высказывания как типы» и суждения

- Всякое высказывание соответствует некоторому типу, доказательства данного высказывания — термам данного типа
- П. Мартин-Лёф: четыре формы суждения:
 - 1 A является множеством (=типом)
 - 2 множество (=тип) A равен множеству (=типу) A
 - 3 a является элементом (=термом) множества (=типа) A
 - 4 a и b являются равными элементами (=термами) множества (=типа) A
- Например, первая форма суждения представляет собой утверждение, что
 - 1 A является множеством (=типом)
 - 2 A является высказыванием
 - 3 A является интенцией (ожиданием)
 - 4 A является проблемой (задачей)

Доктрина «высказывания как типы» и суждения

- Всякое высказывание соответствует некоторому типу, доказательства данного высказывания — термам данного типа
- П. Мартин-Лёф: четыре формы суждения:
 - 1 A является множеством (=типом)
 - 2 множество (=тип) A равен множеству (=типу) A
 - 3 a является элементом (=термом) множества (=типа) A
 - 4 a и b являются равными элементами (=термами) множества (=типа) A
- Например, первая форма суждения представляет собой утверждение, что
 - 1 A является множеством (=типом)
 - 2 A является высказыванием
 - 3 A является интенцией (ожиданием)
 - 4 A является проблемой (задачей)
- Особое выделение логического нерелевантно

Доктрина «высказывания как некоторые типы»

- ГТТ сохраняет интуиционистский подход, но уточняет статус логического

Доктрина «высказывания как некоторые типы»

- ГТТ сохраняет интуиционистский подход, но уточняет статус логического
- Разные термы, относящиеся к некоторому типу, являются разными объектами-доказательствами
- С помощью λ -обрезания можно абстрагироваться от их различий

Доктрина «высказывания как некоторые типы»

- ГТТ сохраняет интуиционистский подход, но уточняет статус логического
- Разные термы, относящиеся к некоторому типу, являются разными объектами-доказательствами
- С помощью -1 -обрезания можно абстрагироваться от их различий
- -1 -обрезание превращает любой тип в тип-высказывание
- Заселённый тип — истинное высказывание, незаселённый тип — ложное
- -1 уровень: единственный терм как положительное истинностное значение

Доктрина «высказывания как некоторые типы»

- ГТТ сохраняет интуиционистский подход, но уточняет статус логического
- Разные термы, относящиеся к некоторому типу, являются разными объектами-доказательствами
- С помощью -1 -обрезания можно абстрагироваться от их различий
- -1 -обрезание превращает любой тип в тип-высказывание
- Заселённый тип — истинное высказывание, незаселённый тип — ложное
- -1 уровень: единственный терм как положительное истинностное значение
- Чисто логическое ограничивается -1 уровнем
- У. Ловер: логика становится «частным случаем геометрии»

Логическое в структуре математики

- Уровень «чисто» логического: правила введения и удаления
- Более высокие уровни: правила построения математических структур, лежащих за пределами «чистой» логики

Логическое в структуре математики

- Уровень «чисто» логического: правила введения и удаления
- Более высокие уровни: правила построения математических структур, лежащих за пределами «чистой» логики
- Логические структуры сохраняются на более высоких уровнях и играют формообразующую роль

Логическое в структуре математики

- Уровень «чисто» логического: правила введения и удаления
- Более высокие уровни: правила построения математических структур, лежащих за пределами «чистой» логики
- Логические структуры сохраняются на более высоких уровнях и играют формообразующую роль
- М. Ратьен: «логические операции оказываются специальными случаями математических операций более общего вида»

Спасибо за внимание!