МОНАДА ДИАГРАММ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МЕТАМОДЕЛЬ СИСТЕМНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

С. П. Ковалёв[1]

Аннотация: Рассматриваются вопросы разработки перспективных математических методов системной инженерии, способных лечь в основу компьютерных инструментов автоматического синтеза и анализа систем и процессов. Следуя современным тенденциям, в качестве аппарата для методов выбрана теория категорий. Ее применение отталкивается от представления структуры систем, процессов, требований и других результатов системного проектирования диаграммами в категориях, объектами которых служат алгебраические модели составных частей, а морфизмы описывают взаимосвязи между частями. При помощи фундаментальной уплощающей конструкции Гротендика описано явное построение категорий диаграмм, монады диаграмм, монады и комонады диаграмм с отмеченной точкой. Указаны области приложения этих конструкций в процедурах системной инженерии. Предложен подход к реализации высокоавтоматизированных технологий типа порождающего проектирования для сложных многоуровневых систем.

Ключевые слова: теория категорий, монада диаграмм, конструкция Гротендика, копредел, системная инженерия, система систем, порождающее проектирование

1 Введение

Эффективность традиционных узкопрофильных инженерных дисциплин (механика, гидравлика, электроника и др.), в особенности в условиях цифровизации, обусловлена широким применением математического аппарата, включающего аналитическую геометрию, дифференциальные уравнения, математическое программирование и др. Однако для решения задач системной инженерии математические методы развиты слабо, проигрывая «практикам» и «техникам» [1]. Поэтому успешные системные проекты плохо поддаются тиражированию и сборке в мегапроекты: не хватает формальных абстрактных схем выполненных процедур и правил расчета влияния контекста на достигнутые результаты. Тем более трудно передать проектирование систем компьютеру: приходится ограничиваться средствами редактирования и

[1] Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, kovalyov@sibnet.ru

несложного анализа «наглядных» цифровых схем, изображающих придуманные инженером структуры систем и процессов.

В ряде публикаций [2, 3, 4 и др.] предлагается решить эту проблему путем привлечения теории категорий – раздела высшей алгебры, направленного на унифицированное представление объектов различной природы и отношений между ними. В основе приложения теории категорий лежит представление структуры систем, процессов, требований и др. диаграммами в категориях типа «каталогов», объектами которых служат алгебраические модели составных частей, а морфизмы описывают те или иные взаимосвязи между частями. Известны категории-каталоги геометрических форм, сценариев поведения частей, энергетических ресурсов и т.д. [5]

Однако, диаграммы чаще всего рассматриваются фрагментарно и специфично для конкретного прикладного контекста. Отрывочность и разнобой наблюдаются даже на уровне метамодели – языка, на котором описываются и верифицируются свойства и преобразования диаграмм в ходе моделирования объектов и процедур системной инженерии. При этом терминологически выверенные глубокие исследования диаграммных конструкций, написанные «чистыми» математиками, совершенно непостижимы, да и не очень интересны, инженерам.

Настоящая работа нацелена на преодоление этого недостатка, вводя универсальный (в строгом теоретико-категорном смысле) язык, основанный на известной конструкции монады диаграмм [6, 7]. Основным рабочим инструментом служат элементарные универсальные конструкции в «категории» **CAT**, состоящей из всех категорий и всех функторов. Такие конструкции (в том числе компоненты рассматриваемых в работе монад) определены с точностью до изоморфизма, но для ясности изложения предполагается, что у них задан некоторый канонический вид. Описаны явное построение и области приложения категорий диаграмм, монады диаграмм, монады и комонады диаграмм с отмеченной точкой.

2 Категории структур систем

Предполагается, что читатель знаком с основами теории категорий. Используются элементарные теоретико-категорные конструкции и обозначения, введенные в работах [7, 8]. Начнем с конструкции универсального расслоения (universal bundle) для категорий – это канонический функтор $\mathbf{B} : \dot{\mathbf{C}}\mathbf{AT} \to \mathbf{CAT}$, где через $\dot{\mathbf{C}}\mathbf{AT}$ обозначена «категория» всех категорий с отмеченной точкой, объектом в которой служит любая пара (A, C), $C \in \mathrm{Ob}\ \mathbf{CAT}$, $A \in \mathrm{Ob}\ C$, и морфизмом (A, C) в (A', C') служит любая пара $(f : GA \to A', G : C \to C')$; функтор $\mathbf{B}$ «забывает» отмеченную точку. Для произвольного функтора $F : D \to \mathbf{CAT}$ декартов квадрат с универсальным расслоением известен как уплощающая конструкция Гротендика $\int F$ (Grothendieck flattening construction [9]):

$$\begin{tikzcd}
\int F \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \dot{\mathbf{C}}\mathbf{AT} \arrow[d, "\mathbf{B}"] \\
D \arrow[r, "F"'] & \mathbf{CAT}
\end{tikzcd}$$

В явном виде, объектом категории $\int F$ служит любая пара (A, X), $X \in \mathrm{Ob}\ D$, $A \in \mathrm{Ob}\ FX$, и морфизмом пары (A, X) в (A', X') служит любая пара $(f : (Fg)A \to A', g : X \to X')$ (с законом композиции вида $(f, g) \circ (h, q) = (f \circ (Fg)h, g \circ q)$). Можно принять такое описание конструкции Гротендика за ее определение [10, п.12.2.10] (и построить универсальное расслоение как $\int 1_{\mathbf{CAT}}$).

Отображение $(A, X) \mapsto X$ задает канонический «забывающий» функтор из $\int F$ в D, представленный левой вертикальной стрелкой в вышеприведенном декартовом квадрате. Полный прообраз (декартов квадрат) этого функтора относительно любого элемента $\ulcorner X \urcorner : \boldsymbol{1} \to D$ (где $\boldsymbol{1}$ – сингулярная категория, терминальный объект в $\mathbf{CAT}$) задает каноническое вложение $\boldsymbol{i}_X : FX \hookrightarrow \int F : A \mapsto (A, X), f \mapsto (f, 1_X)$. В сумме получается вложение $[\boldsymbol{i}_X]_{X \in \mathrm{Ob}\ D} : \coprod_{X \in \mathrm{Ob}\ D} FX \hookrightarrow \int F$, биективное на объектах. Если категория D дискретна, то это суммарное вложение является изоморфизмом.

Для контравариантного функтора $F : D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT}$ в качестве правой вертикальной стрелки вышеприведенного декартового квадрата используется универсальное «*op*-расслоение» $\mathbf{B} : \dot{\mathbf{CAT}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT}^{\mathrm{op}}$ (а функтор F рассматривается как действующий из D в $\mathbf{CAT}^{\mathrm{op}}$). Применим такую контравариантную конструкцию Гротендика к функтору $C^{-} : \mathbf{Cat}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT} : X \mapsto C^X$ для некоторой категории C. (Универсальный характер этого функтора вытекает из того, что экспонента C^X вычисляется посредством эндофунктора, правого сопряженного к эндофунктору произведения $C \mapsto X \times C$ [8, § IV.6], которое в свою очередь сводится к декартову квадрату функторов $!_X : X \to \boldsymbol{1}$ и $!_C : C \to \boldsymbol{1}$, каждый из которых определен единственным образом.) В результате получается категория диаграмм, которая обозначается через $\mathbf{D}C$ и является «нестрогим ко-пополнением» (lax cocompletion) [6] категории C. Класс объектов категории $\mathbf{D}C$ состоит из всех C-диаграмм, а морфизмом диаграммы $\Delta : X \to C$ в $\Delta' : X' \to C$ служит любая пара вида $\langle \gamma, f \rangle$, состоящая из функтора $f : X \to X'$ и естественного преобразования $\gamma : \Delta \to \Delta' f$; закон композиции имеет вид $\langle \gamma, f \rangle \circ \langle \varphi, g \rangle = \langle \gamma g \circ \varphi, fg \rangle$. Имеется каноническое вложение $[\boldsymbol{i}_I]_{I \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Cat}} : \coprod_{I \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Cat}} C^I \hookrightarrow \mathbf{D}C$, биективное на объектах.

Процедура построения категории $\mathbf{D}C$ функториальна по C: любой функтор $F : C \to C'$ индуцирует функтор

$$F- : \mathbf{D}C \to \mathbf{D}C' : \Delta \mapsto F\Delta, \langle \gamma, f \rangle \mapsto \langle F\gamma, f \rangle.$$

Тем самым, определен эндофунктор

$$\mathbf{D} : \mathbf{CAT} \to \mathbf{CAT} : C \mapsto \mathbf{D}C, F \mapsto F-,$$

(так что можно построить категорию *всех* диаграмм $\int\mathbf{D}$). Отметим, что $\mathbf{D}\boldsymbol{1} \cong \mathbf{Cat}$, и левая вертикальная стрелка в декартовом квадрате конструкции Гротендика для $\mathbf{D}C$ представляет собой канонический функтор формы диаграмм

$$\mathbf{D}!_C : \mathbf{D}C \to \mathbf{Cat} : \Delta \mapsto \operatorname{dom}\Delta,\ \langle\gamma, f\rangle \mapsto f.$$

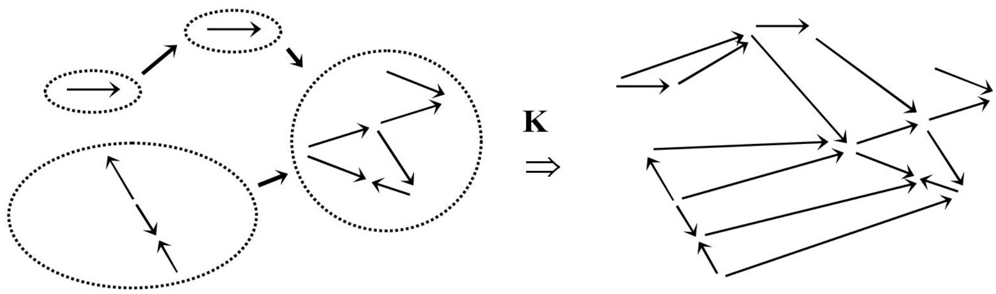
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}C \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathbf{D}!_C"] & \dot{\mathbf{C}}\mathbf{AT}^{\mathrm{op}} \arrow[d, "\mathbf{B}"] \\
\mathbf{Cat} \arrow[r, "C^-"'] & \mathbf{CAT}^{\mathrm{op}}
\end{tikzcd}$$

В приложениях в области системной инженерии диаграммы представляют структуры систем, а их морфизмы описывают структурные преобразования систем на алгебраическом языке [5]. Функтор **D** описывает естественный переход от каталогов объектов к каталогам структур систем, которые можно составить из объектов. Подходящие подкатегории в $\mathbf{D}C$ могут служить пространствами проектирования (design space) для автоматического поиска (суб-, парето-)оптимальных структур систем. Для такой оптимизации целевые функции, изначально заданные заинтересованными сторонами систем, преобразуются в функторы, действующие из пространств проектирования в линейно упорядоченные множества значений, рассматриваемые как категории [11]. Для эффективной навигации в пространствах проектирования вдоль морфизмов диаграмм могут привлекаться средства компьютерной алгебры. Открывается возможность реализации высокоавтоматизированных технологий типа порождающего проектирования (generative design) [12] для сложных систем.

3 Монада диаграмм

Как известно [6, 7], функтор **D** определяет в **CAT** монаду, которая по ряду свойств аналогична монаде степени $\langle 2^-, \{-\}, \bigcup\rangle$ в категории множеств **Set**. Компонента единицы монады **D**, соответствующая категории C – это полное вложение C в $\mathbf{D}C$, которое переводит объект A в диаграмму-точку $\ulcorner A \urcorner$. Умножение задает «отрисовку» $\mathbf{D}C$-диаграммы в виде C-диаграммы: отрисовка $\mathbf{K}\Xi$ диаграммы $\Xi : I \to \mathbf{D}C$ порождается заменой каждой точки $i \in \operatorname{Ob} I$ C-диаграммой Ξi и разделением каждого морфизма диаграмм Ξk, $k \in \operatorname{Mor} I$, на составляющие его морфизмы из категории C. Тем самым, точка диаграммы $\mathbf{K}\Xi$

– это пара (l, i), $i \in \mathrm{Ob}\, I$, $l \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{dom}\,\Xi i$, помеченная объектом $(\Xi i)l$, а стрелка из нее в (l', i') – это пара $(q : hl \to l', k : i \to i')$, помеченная морфизмом $(\Xi i')q \circ \theta_l$, где $\langle\theta, h\rangle = \Xi k$.



Формально, отрисовка вычисляется при помощи ковариантной конструкции Гротендика для композиции Ξ с функтором формы $\mathbf{D}!_C$ и каноническим вложением **Cat** в **CAT**. Приведем композицию соответствующих декартовых квадратов:

$$
\begin{tikzcd}
 & C & & \\
\mathrm{dom}\,\mathbf{K}\Xi \arrow[ur, dotted, "\mathbf{K}\Xi"] \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \dot{\mathbf{D}}C \arrow[u, "\boldsymbol{e}_C"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\boldsymbol{b}_C"] & \dot{\mathbf{Cat}} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \dot{\mathbf{CAT}} \arrow[d, "\mathbf{B}"] \\
I \arrow[r, "\Xi"'] & \mathbf{D}C \arrow[r, "\mathbf{D}!_C"'] & \mathbf{Cat} \arrow[r, hook] & \mathbf{CAT}
\end{tikzcd}
$$

Здесь правый декартов квадрат задает универсальное расслоение для малых категорий. Центральный декартов квадрат приводит к категории диаграмм с отмеченной точкой $\dot{\mathbf{D}}C$ – это конструкция Гротендика для конструкции Гротендика $\mathbf{D}C$. Ее объектом служит любая пара (x, Δ), состоящая из диаграммы $\Delta : X \to C$ и точки $x \in \mathrm{Ob}\, X$, а морфизмом такой пары в $(x', \Delta' : X' \to C)$ служит любая тройка $\langle q, \gamma, f\rangle$, где $\langle\gamma, f\rangle : \Delta \to \Delta'$ – морфизм диаграмм и $q : fx \to x'$ – стрелка в X'; закон композиции морфизмов имеет вид $\langle q, \gamma, f\rangle \circ \langle r, \varphi, g\rangle = \langle q \circ fr, \gamma g \circ \varphi, fg\rangle$. Имеется канонический функтор $\boldsymbol{b}_C : \dot{\mathbf{D}}C \to \mathbf{D}C$, забывающий отмеченную точку. Кроме того, имеется функтор означивания $\boldsymbol{e}_C : \dot{\mathbf{D}}C \to C$, переводящий пару (x, Δ) в Δx и морфизм $\langle q, \gamma, f\rangle : (x, \Delta) \to (x', \Delta')$ в $\Delta' q$

$\circ\ \gamma_x : \Delta x \to \Delta' x'$. Отложим более подробное рассмотрение конструкции $\dot{\mathbf{D}}C$ до следующего раздела; приведенных здесь сведений о ней достаточно для проверки того, что левый декартов квадрат задает искомую отрисовку диаграммы Ξ.

Имеется вложение диаграмм $[\langle 1_{\Xi i}, \boldsymbol{i}_i : \mathrm{dom}\ \Xi i \hookrightarrow \mathrm{dom}\ \mathbf{K}\Xi\rangle]_{i \in \mathrm{Ob}\ I} : \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\ I} \Xi i \hookrightarrow \mathbf{K}\Xi$, биективное на точках. Если диаграмма I дискретна, то это вложение является изоморфизмом, а отрисовка – вершиной копредела диаграммы Ξ.

Определим отрисовку произвольного морфизма $\mathbf{D}C$-диаграмм $\phi : \Xi \to \Xi'$. Рассмотрим $\mathbf{DD}C$-диаграмму со схемой $\boldsymbol{2}$ (это граф $0 \to 1$), единственная нетождественная стрелка которой помечена морфизмом ϕ. Двукратная отрисовка этой диаграммы дает C-диаграмму со схемой, снабженной забывающим функтором в $\boldsymbol{2}$, прообраз нетождественной стрелки относительно которого позволяет восстановить морфизм $\mathbf{K}\phi : \mathbf{K}\Xi \to \mathbf{K}\Xi'$. В явной форме, пусть $\phi = \langle \varphi, \mathcal{g}\rangle$, где естественное преобразование $\varphi : \Xi \to \Xi'\mathcal{g}$ составлено из компонентов $\varphi_i = \langle \gamma^i, \mathcal{f}^i\rangle : \Xi i \to \Xi'\mathcal{g}i$, $i \in \mathrm{Ob}\ I$. Рассмотрим функтор $\mathcal{e} : \mathrm{dom}\ \mathbf{K}\Xi \to \mathrm{dom}\ \mathbf{K}\Xi'$, сопоставляющий точке (l, i) точку $(\mathcal{f}^i l, \mathcal{g}i)$, а стрелке $(q, k) : (l, i) \to (l', i')$ – пару $(\mathcal{f}^{i'} q, \mathcal{g}k)$, которая задает стрелку в диаграмме $\mathbf{K}\Xi'$, направленную из $\mathcal{e}(l, i)$ в $\mathcal{e}(l', i')$, ввиду соотношения $\langle \gamma^{i'}, \mathcal{f}^{i'}\rangle \circ \Xi k = \Xi'\mathcal{g}k \circ \langle \gamma^i, \mathcal{f}^i\rangle$. Семейство морфизмов $\gamma^i{}_l : (\Xi i)l \to (\Xi'\mathcal{g}i)(\mathcal{f}^i l)$, $(l, i) \in \mathrm{Ob\ dom}\ \mathbf{K}\Xi$, составляет естественное преобразование $\mathbf{K}\Xi$ в $(\mathbf{K}\Xi')\mathcal{e}$, которое в паре с функтором $\mathcal{e}$ и образует морфизм $\mathbf{K}\phi$. Непосредственно проверяется, что таким путем действительно задается функтор $\mathbf{K}$, и все такие функторы образуют естественное преобразование $\mathbf{DD}$ в $\mathbf{D}$, удовлетворяющее аксиомам монады.

Рассмотрим алгебры монады диаграмм. Свободные алгебры порождаются компонентами отрисовки $\mathbf{K}$. Единица также вносит свой вклад: если ее компонента, соответствующая категории C, имеет левый сопряженный функтор (а правого сопряженного она иметь не может), то единица этого сопряжения состоит из копределов C-диаграмм, так что категория C кополна и, более того, указанный левый сопряженный $colim : \mathbf{D}C \to C$ задает алгебру [7]. Поскольку функтор, сопряженный к заданному, определяется однозначно с точностью до изоморфизма [8, § IV.1], получается, что конструкция копредела «закодирована» в тривиальной процедуре построения одноточечных диаграмм.

Другим примером алгебры монады **D** служит $\int : \mathbf{D}(\mathbf{CAT}) \to \mathbf{CAT} : \Delta \mapsto \int\Delta$, устроенная аналогично свободной алгебре над $\boldsymbol{1}$. При помощи отрисовки строятся и другие алгебры, не изоморфные ни копределам, ни свободным алгебрам. Например, обозначим через **PrCAT** полную подкатегорию в **CAT**, состоящую из всех тонких категорий (предпорядков). Она рефлективна: ее вложение в **CAT** имеет левый сопряженный $\boldsymbol{P} : \mathbf{CAT} \to \mathbf{PrCAT}$ с тождественной коединицей (для произвольной категории C, $\boldsymbol{P}C$ – это класс Ob C, предупорядоченный бинарным предикатом Mor(–, –) ≠ ∅). Далее, пусть $\check{\mathbf{D}} : \mathbf{CAT} \to \mathbf{CAT}$ – подфунктор в **D**, сопоставляющий категории C полную подкатегорию в $\mathbf{D}C$, состоящую из всех тонких C-диаграмм, и действующий на функторы так же, как **D**. Если C – тонкая категория, то имеется алгебра $\boldsymbol{P}(\mathbf{K}–) : \mathbf{D}\check{\mathbf{D}}C \to \check{\mathbf{D}}C$.

Алгебры строятся и при помощи морфизмов монады **D** в другие монады [8, упражнение 6.2.3(б)]. Так, **D** имеет две подмонады-ретракта: одна из них сопоставляет произвольной категории C категорию всех дискретных C-диаграмм, а другая – категорию всех C-диаграмм в форме группоидов. Следовательно, если в C есть суммы, то существует две в общем случае не изоморфные друг другу алгебры над C: одна сопоставляет произвольной C-диаграмме сумму всех ее вершин, а вторая – сумму всех вершин ее скелета.

Что касается приложений монады диаграмм, то компонента ее единицы задает представление любого объекта как бесструктурной сингулярной системы, а левый сопряженный к ней (при его наличии) представляет сборку систем в цельные объекты. Функтор отрисовки строит детальную «плоскую» структуру многоуровневых систем, состоящих из систем (systems of systems, SoS), путем разрешения взаимосвязей верхнего уровня, причем ассоциативность умножения монады гарантирует независимость итоговой структуры от порядка анализа промежуточных уровней. Алгебры задают шаблоны различных процедур «упаковки» систем в сложные объекты с соблюдением условий естественности относительно модификаций [7]. Из «материала» монады диаграмм строятся и другие конструкции.

4 Монада и комонада систем систем

Существует сопряжение функторов, связывающее конструкцию Гротендика с функтором формы диаграмм [6]. Рассмотрим категорию **CAT**/**Cat**, объектами в которой служат все функторы вида $F : D \to \mathbf{Cat}$, и морфизмом такого функтора в $F' : D' \to \mathbf{Cat}$ является любой функтор $G : D \to D'$ такой, что $F'G = F$ (эту категорию можно построить посредством декартова квадрата в **CAT** [13]). Поскольку $!_{C'}H = !_C$ для произвольного функтора $H : C \to C'$, функтор формы диаграмм индуцирует функтор

$$\mathbf{D}_! : \mathbf{CAT} \to \mathbf{CAT}/\mathbf{Cat} : C \mapsto \mathbf{D}!_C,\ H \mapsto \mathbf{D}H.$$

В свою очередь, любой функтор $F : D \to \mathbf{Cat}$ в композиции с каноническим вложением категории **Cat** в **CAT** дает функтор, обозначаемый через $^{\wedge}F : D \to \mathbf{CAT}$, для которого определена конструкция Гротендика $\int^{\wedge}F$. Отображение $F \mapsto \int^{\wedge}F$ служит функцией объектов функтора $\int^{\wedge} : \mathbf{CAT}/\mathbf{Cat} \to \mathbf{CAT}$, который переводит морфизм G в единственную стрелку из $\int^{\wedge}F$ в $\int^{\wedge}F'$, делающую коммутативной нижеследующую диаграмму, в которой все пунктирные стрелки изображают ребра декартовых квадратов:

$$\begin{tikzcd}
\int F \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, dotted, "\int G"] \arrow[dd, dashed] & & \dot{\mathbf{Cat}} \arrow[dr, "1_{\dot{\mathbf{Cat}}}"] \arrow[dd, dashed] & & \\
& \int F' \arrow[rr, dashed] \arrow[dd, dashed] & & \dot{\mathbf{Cat}} \arrow[r, dashed] \arrow[dd, dashed] & \dot{\mathbf{CAT}} \arrow[dd, "\mathbf{B}"] \\
D \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathbf{Cat} \arrow[dr, "1_{\mathbf{Cat}}"'] & & \\
& D' \arrow[rr, "F'"'] & & \mathbf{Cat} \arrow[r, hook] & \mathbf{CAT}
\end{tikzcd}$$

В явном виде, имеем

$$\textstyle\int^{\wedge} G : \int^{\wedge} F \to \int^{\wedge} F' : (A, X) \mapsto (A, GX), (f, g) \mapsto (f, Gg).$$

Как показывает диаграмма из предыдущего раздела, описывающая построение отрисовки **K**Ξ (см. композицию правого и центрального декартовых квадратов), категория $\int^{\wedge}(\mathbf{D}!_C)$ совпадает с категорией диаграмм с отмеченной точкой $\dot{\mathbf{D}}C$. Тем самым, определен эндофунктор

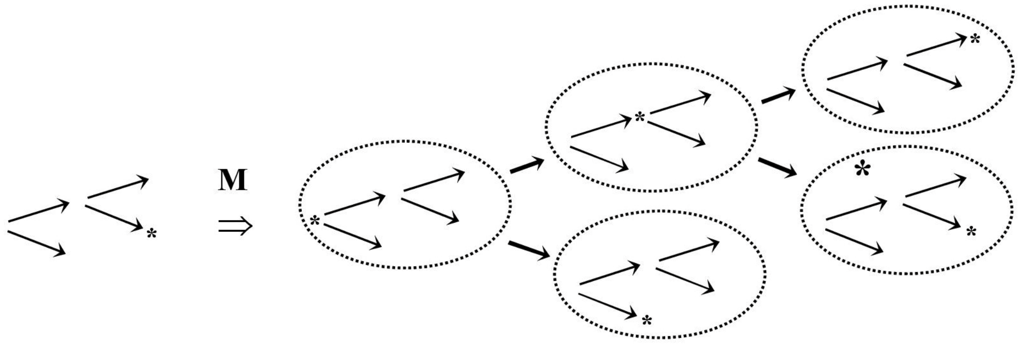
$$\dot{\mathbf{D}} = \textstyle\int^{\wedge}\mathbf{D}_! : \mathbf{CAT} \to \mathbf{CAT} : C \mapsto \dot{\mathbf{D}}C,$$

действующий на функторы так же, как **D**, не затрагивая отмеченные точки диаграмм. Более того, функтор $\int^{\wedge}$ сопряжен слева к функтору $\mathbf{D}_!$, причем коединица этого сопряжения $\boldsymbol{e} : \int^{\wedge}\mathbf{D}_! = \dot{\mathbf{D}} \to 1_{\mathbf{CAT}}$ состоит из функторов означивания $\boldsymbol{e}_C$, $C \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{CAT}$ (так что верхний треугольник на вышеупомянутой диаграмме – это частный случай треугольного тождества сопряжения, что свидетельствует об универсальности конструкции отрисовки). Компонента единицы $\boldsymbol{t} : 1_{\mathbf{CAT/Cat}} \to \mathbf{D}_!\int^{\wedge}$, соответствующая функтору $F : D \to \mathbf{Cat}$, представляет собой функтор $\boldsymbol{t}_F : D \to \mathbf{D}\int^{\wedge}F$, сопоставляющий объекту X диаграмму $\boldsymbol{i}_X : FX \hookrightarrow \int^{\wedge}F$, а морфизму $g : X \to X'$ – морфизм $\langle \rho, Fg\rangle : \boldsymbol{i}_X \to \boldsymbol{i}_{X'}$, где естественное преобразование $\rho : \boldsymbol{i}_X \to \boldsymbol{i}_{X'}(Fg)$ составлено из компонентов $\rho_A = (1_{(Fg)A}, g) : (A, X) \to ((Fg)A, X')$, $A \in \mathrm{Ob}\,FX$; ясно, что $(\mathbf{D}!_{\int^{\wedge}F})\boldsymbol{t}_F = F$.

Это сопряжение стандартным способом [8, § VI.1] задает комонаду $\dot{\mathbf{D}}$ в **CAT**, коединица которой состоит из функторов $\boldsymbol{e}_C$, а коумножение состоит из «размножителей диаграмм» вида

$$\mathbf{M} = \textstyle\int^{\wedge}\boldsymbol{t}_{\mathbf{D}!_C} : \dot{\mathbf{D}}C \to \dot{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{D}}C : (x, \Delta : X \to C) \mapsto (x, \boldsymbol{i}_\Delta : X \hookrightarrow \dot{\mathbf{D}}C), \langle q, \gamma, f\rangle \mapsto \langle q, \gamma^{\mathbf{M}}, f\rangle,$$

где $\gamma^{\mathbf{M}} : \boldsymbol{i}_\Delta \to \boldsymbol{i}_{\Delta'}\boldsymbol{f}$ – естественное преобразование, сопоставляющее каждому $x \in \mathrm{Ob}\,X$ морфизм $\langle 1_{fx}, \gamma, f\rangle : (x, \Delta) \to (fx, \Delta')$. Тем самым, **M** размещает в каждой точке x диаграммы Δ копию Δ, у которой точка x отмечена:



Рассмотрим коалгебры комонады $\dot{\mathbf{D}}$. Воспользуемся конструкцией сравнивающего функтора [8, § VI.3]: таковым служит функтор K, действующий из $\mathbf{CAT}/\mathbf{Cat}$ в категорию коалгебр, сопоставляя функтору $F : D \to \mathbf{Cat}$ коалгебру $\int^{\wedge}\boldsymbol{t}_F : \int^{\wedge}F \to \dot{\mathbf{D}}\int^{\wedge}F$. Любая коалгебра комонады $\dot{\mathbf{D}}$ изоморфна коалгебре такого вида [6]. В частности, $K(\mathbf{D}!_C) = \mathbf{M} : \dot{\mathbf{D}}C \to \dot{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{D}}C$ (это косвободная коалгебра). А если F переводит любой объект в $\boldsymbol{1}$, т.е. $F = \ulcorner\boldsymbol{1}\urcorner\,!_D$, то конструкция Гротендика дает D и коалгебра $K(\ulcorner\boldsymbol{1}\urcorner\,!_D) : D \to \dot{\mathbf{D}}D$ переводит объект A в диаграмму-точку $\ulcorner A\urcorner$ с единственно возможной отмеченной точкой. В свою очередь, если F – это некоторая диаграмма-точка $\ulcorner I\urcorner : \boldsymbol{1} \to \mathbf{Cat}$, то $\int^{\wedge}\ulcorner I\urcorner = I$ и $K(\ulcorner I\urcorner) : I \to \dot{\mathbf{D}}I : i \mapsto (i, 1_I), k \mapsto \langle k, 1_{1_I}, 1_I\rangle$.

Кроме комонады, эндофунктор $\dot{\mathbf{D}}$ определяет в $\mathbf{CAT}$ и монаду, устроенную аналогично монаде диаграмм: компонента единицы совпадает с $K(\ulcorner\boldsymbol{1}\urcorner\,!_C)$, а умножение переводит $\dot{\mathbf{D}}C$-диаграмму Ξ с отмеченной точкой i в отрисовку $\mathbf{K}(\boldsymbol{b}_C\Xi)$ с отмеченной точкой (l, i), где l – отмеченная точка Ξi (т.е. $\Xi i = (l, \boldsymbol{b}_C(\Xi i))$). Тем самым, семейство функторов $\boldsymbol{b}_C$, $C \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{CAT}$, образует морфизм монады $\dot{\mathbf{D}}$ в $\mathbf{D}$. В частности, любая алгебра $a : \mathbf{D}C \to C$ монады $\mathbf{D}$ порождает алгебру $a\boldsymbol{b}_C : \dot{\mathbf{D}}C \to C$ монады $\dot{\mathbf{D}}$. Легко проверить, что алгебру задает также любой функтор означивания $\boldsymbol{e}_C : \dot{\mathbf{D}}C \to C$.

С прикладной точки зрения, конструкция $\dot{\mathbf{D}}$ формально выражает первый принцип системной инженерии: целевая система (system of interest, SoI) рассматривается в контексте, как элемент некоторой известной объемлющей системы [14]. Именно из такого рассмотрения возникают требования к целевой системе и начинается ее жизненный цикл. А структурная схема объемлющей системы с составляющими из каталога C, снабженная указанием места целевой системы в ней – это и есть объект категории $\dot{\mathbf{D}}C$. Разумеется, целевая система в свою очередь служит объемлющей для своих подсистем, так что возникают приложения конструкций вида $\dot{\mathbf{D}}^n C$, где $n > 1$ – число рассматриваемых системных уровней, в инженерии систем систем (SoS).

Монада $\dot{\mathbf{D}}$ показывает, как корректно учесть вхождение целевой системы при проведении с объемлющими системами процедур структурного анализа и синтеза из предыдущего раздела. А комонада $\dot{\mathbf{D}}$ предоставляет специфические средства для работы с системой в контексте: коединица извлекает из объемлющей систему целевую, «забывая» все остальное, а коумножение порождает самоподобные многоуровневые системы, в которых каждый элемент воспроизводит структуру предыдущего уровня с сохранением своей идентичности. Самоподобие относится к ключевым свойствам систем, как природных, вплоть до Вселенной как целое [15], так и технических, например в сфере телекоммуникаций [16]. Генерация самоподобных структур расширяет возможности автоматического синтеза систем, в том числе «бионического» типа.

5 Заключение

При помощи универсальных конструкций в **CAT** (в основном декартовых квадратов, в том числе конструкции Гротендика, и сопряжений) в настоящей работе построены математические объекты, в которых «закодированы» ключевые процедуры системной инженерии. Показана основополагающая роль монады диаграмм. Целесообразно рекомендовать ее и производные конструкции к реализации в «умных» инструментах цифровой системной инженерии, способных автоматически генерировать оптимальные структуры систем и процессов.

Литература

1. *Левенчук А. И.* Системноинженерное мышление. – М.: TechInvestLab, 2015. 305 с.

2. *Mabrok M. A., Ryan M. J.* Category theory as a formal mathematical foundation for model-based systems engineering // Applied Mathematics and Information Sciences, 2017. Vol. 11. No. 1. P. 43–51.
3. *Breiner S., Subrahmanian E., Jones A.* Categorical foundations for system engineering // Disciplinary Convergence in Systems Engineering Research / Eds. A. Madni, B. Boehm, R. Ghanem, D. Erwin, D. Wheaton. – Springer, 2018. P. 449–463.
4. *Watson M. D.* Future of systems engineering // INCOSE INSIGHT, 2019. Vol. 22. Issue 1. P. 8–12.
5. *Ковалёв С. П.* Методы теории категорий в модельно-ориентированной системной инженерии // Информатика и ее применения, 2017. Т. 11. Вып. 3. С. 42–50.
6. *Guitart R., van den Bril L.* Décompositions et lax-complétions // Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 1977. Vol. 18. No. 4. P. 333–407.
7. *Ковалёв С. П.* Теория категорий как математическая прагматика модельно-ориентированной системной инженерии // Информатика и ее применения, 2018. Т. 12, Вып. 1. С. 95–104.
8. *Маклейн С.* Категории для работающего математика / Пер. с англ. – М.: Физматлит, 2004. 352 с. (*Mac Lane S.* Categories for the working mathematician. – Springer, 1978. 317 p.)
9. Grothendieck construction. – nLab, 2020. https://ncatlab.org/nlab/show/Grothendieck+construction.
10. *Barr M., Wells C.* Category theory for computing science. – London: Prentice Hall, 1990. 538 p.
11. *Ковалёв С. П.* Алгебраические методы порождающего проектирования крупномасштабных технических систем // Управление развитием крупномасштабных систем: Материалы XII Международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 384–386.
12. *Kowalski J.* CAD is a lie: generative design to the rescue. – San Rafael, CA, USA: Autodesk, 2016. https://www.autodesk.com/redshift/generative-design/.
13. Comma category. – nLab, 2019. https://ncatlab.org/nlab/show/comma+category.
14. *Hitchins D.* What are the general principles applicable to systems? // INCOSE INSIGHT, 2009. Vol. 12. Issue 4. P. 59–64.
15. *Iovane G., Laserra E., Tortoriello F.S.* Stochastic self-similar and fractal universe // Chaos, Solitons & Fractals, 2004. Vol. 20. Issue 3. P. 415–426.
16. *Larijani H.* Local area networks and self-similar traffic // Network Performance Engineering / Ed. D. D. Kouvatsos. – Lecture Notes in Computer Science ser. – Springer, 2011. Vol. 5233. P. 174–190.