

О классификации в математике и других науках

Г.Б. Шабат

31 марта 2021

**Конструктивное знание – 13:
математика как язык науки**

План

0. Введение	2
1. О классификации всего сущего	3-7
2. Начальные объекты в <i>эволюционных</i> категориях?	8
3. Успешная классификация в математике	9
4. Типичные и исключительные объекты	10
5. Чем помогают категории?	11
6. Самоописание	12
7. Заключение	13
Литература	14-15

0. Введение

Полное **понимание** объекта \implies

- Отнесение его к некоторой *категории*;
- Введение понятия *одинаковости* объектов;
 - Описание класса классов объектов;
- (желательно) *Поименование* классов объектов.

Планеты Солнечной системы;

Океаны;

*Шахматные фигуры, дебюты;

(матем.) Группы?

Языки?

Болезни?

...

1. О классификации всего сущего (а)

Аристотель. (384-322 до Р.Х.) занимался много чем.

Названия некоторых трудов:

*О памяти и воспоминании,
О сне и бодрствовании,
О долготы и краткости жизни,
О движении животных,
О дыхании,
О цветах,
О добродетелях и пороках,
Политика,
Поэтика.*

Для математиков он прежде всего – основатель логики; его учение о *силлогизмах* пережило тысячелетия.

Для нас сегодня важны (некоторые!..) его идеи о *классификации*.

Вряд ли **первоначала** всего сущего – материя, форма, производящая причина и цель.

Но вот два положения, которые можно извлечь из его работ.

- Хорошая классификация достаточно обширного класса объектов является, как правило, многоуровневой.
- Классификация объектов обычно не окончательна. О её качестве можно судить по её приспособленности к модификациям, требуемым развитием наук.

1. О классификации всего сущего (б)

Естественно-научные достижения

Химия. Рекорд по полноте и законченности: *классификация химических элементов* на основе *периодического закона* – Д.И. Менделеев в 1869-71 годы (см. [Менделеев1958]). Его таблица (всем известно) дожила до наших дней, а *свойства некоторых веществ, неизвестных во времена Менделеева, были предсказаны на её основе*. Современное изложение см., например, в [Scerri2011], о связи с математикой – [RestPach2020].

Биология. Классификационные процессы восходят к Аристотелю. Современные результаты классификации собираются в *филогенетические деревья*, которые *сами стремительно эволюционируют* ; см., например, (случайно выбранную из огромного потока работу) [BIAн2020].

По мере внедрения математических понятий и методов классификация *всего живого* будет усложняться и уточняться; см. [CarbGrom2001]. Современная интерактивная компьютерная система *Life tar* (см. [Vienne2016]) поддерживает работу с деревом, в котором около 1.4 миллиона вершин. Вершины деревьев соответствуют *видам* – понятию, которое широко и оживлённо обсуждается.

1. О классификации всего сущего (в)

Естественно-научные достижения

Физика претендует на понимание всего материального и, в частности, не останавливается на химическом понимании веществ на уровне молекул и атомов. Дальнейшее углубление в микромир приводит к теории *элементарных частиц*. Этот раздел физики стремительно развивается, и таблицы часто обновляются; версию 2011 года можно найти в [NakEtAl2011]. Принято считать, что открытие бозона Хиггса ([Рубаков2012]) завершает построение так называемой *Стандартной Модели*. Однако большинство физиков-теоретиков не удовлетворено ей; по их мнению, она недостаточно элегантна и в ней слишком много ”подгоночных” параметров. Перспективы развития физики элементарных частиц за пределами стандартной модели см., например, в [Lykken2010].

Главным же пробелом современной физики, не позволяющем ей стать *теорией всего*, остаётся несогласованность существующих теорий микромира с космологическими теориями – хотя по отдельности и те, и другие существуют и прекрасно согласуются со всеми экспериментальными данными. Предполагается, что сегодняшние теории окажутся предельными случаями теории будущего, в которые в качестве фундаментальных параметров будут входить скорость света c и постоянная Планка \hbar , и теория микромира будет получаться при $c \rightarrow \infty$, а специальная теория относительности – при $\hbar \rightarrow 0$. Классификационные результаты в намечаемых теориях в явном виде вряд ли просматриваются, но намечаются гораздо более тесные, чем у классической физики, **связи с современной математикой**.

1. О классификации всего сущего (г)

Классификация в гуманитарных науках

Классификационные проблемы в **искусствоведении** были поставлены так же давно, как в естественных науках; например, в *Поэтике* [Аристотель1978] классифицируются **литературные жанры** и даются "определения" эпосу, трагедии, комедии и т.д.

Очевидно, за прошедшие тысячелетия не было получено решения этих проблем, сравнимого с таблицей Менделеева по точности и окончательности; впрочем, искусствоведы, как правило, на большее и не претендуют – ср. цитаты ...*Никакой логической и твердой классификации жанров произвести нельзя – [Томашевский1996], ...Признаки многообразны, они скрещиваются и не дают возможности логической классификации жанров по одному какому-нибудь основанию – [Аверинцев1996].*

Тем не менее, если исходить из того, что в наступившем тысячелетии именно наукам о ЧЕЛОВЕКЕ предстоит выйти на первый план, упомянутые достижения нельзя недооценивать. Мы – тот *вид*, соответствующий единственной вершине на необъятном филогенетическом дереве, на представителей которого **произведения искусства действуют**, иногда очень сильно. Для более глубокого понимания этого действия необходима и классификация и видов искусства, и его адресатов (модельный вопрос: *что кому смешно?*).

1. О классификации всего сущего (д)

Классификация в гуманитарных науках

Среди гуманитарных наук особое место занимает **лингвистика**, которая постепенно приобретает всё больше черт точных наук. Её важный раздел, *компаративистика*, напоминает упоминавшуюся выше геномику, во-первых, тем, что её результаты носят классификационный характер (то есть в широком смысле слова относятся к сегодняшней теме), во-вторых, тем, что языки эволюционируют, и, в-третьих, тем, что задачи реконструкции составляют существенную её часть. Кроме того, две дисциплины имеют важное пересечение по предмету исследования – *ранней истории человечества*.

Здесь перспективны междисциплинарные проекты с участием не только представителей упомянутых выше наук – лингвистики и геномики – но и не упомянутой, *археологии*; см. [Старостин2003].

2. Начальные объекты в эволюционных категориях?

Используем теоретико-категорный термин, исходя из довольно поверхностных аналогий: в некоторых классификационных задачах предполагается или считается установленным, что классифицируемые объекты развились из некоторого исходного.

- Возможно, все современные люди – потомки одной-единственной женщины, *африканской Евы*, жившей в Африке около 200 000 лет назад, см. [Sykes2001].
- Некоторые лингвисты поддерживают гипотезу *моногенеза*, заключающуюся в том, что все языки мира произошли из *праязыка*, на котором все наши предки говорили 40-50 тысяч лет назад, см. [Старостин2003].
- Биологи говорят об *общем предке всего живого* (он называется **LUCA** – last universal common ancestor), см. [Wade2016].

3. Успешная классификация в математике

Платоновы тела. Им тысячи лет, и их все знают...

Конечные простые группы. Их классификация сравнительно кратка.

- Циклические группы простого порядка C_p ;
- знакопеременные группы Alt_n при $n \geq 5$;
- группы *лиевского типа* над конечными полями – четыре серии классических (специальные линейные, ортогональные, унитарные и симплектические), и не более двенадцать серий *исключительных*;
- 26 *спорадических* групп.

Простые комплексные алгебры Ли. Их классификация тесно связана с предыдущей, но существенно проще.

- Классические алгебры Ли: *специальные линейные* $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, *ортогональные* $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ и *симплектические* $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$;
- *Исключительные* алгебры Ли: $\mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$, $\mathfrak{e}_7(\mathbb{C})$, $\mathfrak{f}_4(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})$.

Кристаллографические группы. Так называются группы симметрий, которые описывают все возможные симметрии бесконечных дискретных множеств точек в \mathbb{R}^3 . Другое название – *фёдоровские группы*. Имеется 230 кристаллографических групп со сложной системой обозначений *символами Германа-Могена*.

4. Типичные и исключительные объекты

В рассмотренных примерах просматривается общая черта.

Сама природа классифицируемых математических объектов часто подсказывает, какие их свойства следует считать *типичными*, а какие – *исключительными*.

Наличие исключений не указывает на недостатки правил, по которым производится классификация, а скорее выявляет интересные, обычно *уникальные*, объекты.

5. Чем помогают категории?

Согласно Ю.И. Манину, теория категорий воплощает *социологический подход к математике*: объекты рассматриваются не сами по себе, а как члены *сообщества себе подобных*.

Понятие ИЗОМОРФИЗМА!

Категория называется *небольшой*, если классы изоморфизмов её объектов образуют множество.

6. Самоописание

Этот нестандартный термин означает, что каталоги а небольших категорий сами имеют тенденцию принадлежать этим категориям.

Яркий пример доставляют *пространства модулей алгебраических кривых*.

Вероятно, интересно было бы рассмотреть другие категории со свойством "самоописания".

Для объекта $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ естественно говорить о *пространстве деформаций* этого объекта

$$\text{Def}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{X}}$$

– в него входят классы изоморфизма объектов категории \mathcal{X} с теми же дискретными инвариантами, что у \mathbf{X} . Но процедуру взятия пространства деформаций можно *итерировать*! Определим

$$\mathbf{X}_1 := \text{Def}(\mathbf{X}),$$

$$\mathbf{X}_2 := \text{Def}(\mathbf{X}_1),$$

...

Оборвётся ли это процедура? В неопубликованной работе [Kapranov1997] содержится утвердительный ответ (многообразие \mathbf{X} называется *жестким*, если $\text{Def}(\mathbf{X})$ одноточечно, и тогда дальнейшие итерации бессмысленны). Более того, в [Kapranov1997] утверждается, что, если $\dim \mathbf{X} = n$, то процедура обрывается на n -м шагу; в частности, *пространства модулей кривых жестки*. Подробности в [OkawaSano2019].

7. Заключение

- Категории! (Связи между объектами).
- Каталоги! (Внимание к ним, а не только к объектам).
- Исключения.
- Имена!

Литература-1



Christopher Blair and Cécile Ané, *Phylogenetic Trees and Networks Can Serve as Powerful and Complementary Approaches for Analysis of Genomic Data*. Systematic Biology, 2020 May 1;69(3):593-601.



A. Carbone and M. Gromov, *Mathematical slices of molecular biology*. Numéro spécial La Gazette des Mathématiciens, 88:11-80, Société Mathématique de France (2001).



Kapranov1997, *Deformations of moduli spaces*. Non-published draft, 1997.



J. D. Lykken, *Beyond the Standard Model*. CERN Yellow Report. CERN. pp. 101–109. arXiv:1005.1676.



K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *Particle listings*. J. Phys. G 37, 075021 (2010) and 2011 partial update for the 2012 edition.



Shinnosuke Okawa, Taro Sano, *On the noncommutative rigidity of the moduli stack of stable pointed curves*. arXiv:1412.7060v2 [math.AG].



Damien M. de Vienne, *Lifemap: Exploring the Entire Tree of Life*. PLoS Biol 14(12): e2001624. <https://doi.org/10.1371/journal.pbio.2001624>.



Guillermo Restrepo and Leonardo A. Pachon, *Mathematical aspects of the periodic law*. Foundations of Chemistry 9 (2), 189-214.



Eric R.Scerri, *The Periodic Table: A Very Short Introduction*. Oxford University Press, Inc.: New York, 2011.



Bryan Sykes, *The Seven Daughters of Eve: The Science That Reveals Our Genetic Ancestry*. W.W. Norton, 2001.

Литература-2



Nicholas Wade, *Meet Luca, the ancestor of all living things*. The New York Times, July 2016.



С.С. Аверинцев, *Жанр как абстракция и жанры как реальность: диалектика замкнутости и размокнутости*. Риторика и истоки европейской литературной традиции. – М., 1996.



Аристотель, *Сочинения в четырех томах*. Ред. З.Н. Микеладзе. М., «Мысль», 1978.



Валерий Рубаков, *Хиггсовский бозон*. "Квант" №5-6, 2012.



Д. И. Менделеев, *Периодический закон*. М.: Издательство Академии наук СССР, 1958.



С. А. Старостин, *У человечества был единый праязык. (Беседа Г. Зеленко с С. Старостиним)*. Знание - сила. - М., 2003, № 8.



Б.В. Томашевский, *Теория литературы. Поэтика: Учебное пособие*. М. : Аспект Пресс, 1996.