О понимании математических утверждений и их доказательств

Г.Б. Шабат (РГГУ)

4 июля, 2022

Конструктивное знание - 15

План доклада

0. Введение

Понимание математики **кем?**

Можно рассматривать различные классы адресатов: маленькие (и не очень) дети, ленивые (а иногда и добросовестные) школьники, студенты-нематематики, учителя, инженеры...

Всё это важно и интересно.

Но сегодня речь пойдёт о понимании математики математиками. Будут представлены результаты многолетнего **самоанализа**, без претензий на объективность и научность.

Момент понимания сопровождается *вспышкой в мозгу* – возможно, засекаемой нейрофизиологическими средствами.

Человеческие аспекты:
- Восхищение (разочарование, или промежуточные эмоции);
- Интересность;
- ...

1. Понимание утверждений-0. Хочу ли понять?

Вокруг современного математика очень много математики. Препринты (arXiv), статьи, книги,... online-лекции, дистантные конференции,...

Понимать всё не может даже самый быстрый и разносторонний гений. Чтобы **хотеть понять** (данную работу или отдельный результат из неё), нужны

причины:

• работа относится к моей области;

• меня интересует этот автор;

• "все" об этом говорят;

• я – студент/аспирант (математик) и мне надо сдать экзамен;

...

• *почему-то понравилось*;

• *результат удивителен*;

• ...

Далее предполагается, что математик хочет понять результат.

1. Понимание утверждений-1. Уровень краткого реферата

При некоторых условиях некоторые объекты обладают определёнными свойствами...

Я знаю, где это написано и, если будет надо, уточню...

Пример: теорема Петри. *За некоторыми исключениями кривые представимы как пересечения квадрик.*
(Речь о гладких алгебраических кривых. Оказывается, они, как правило, могут быть заданы системой уравнений степени 2).

Исключения. *Гиперэллиптические* кривые $y^2 = P_{2g+1}(x)$ при $g \geq 2$ – не пересечения квадрик. И ещё есть короткий список запретов – не помню.

Гууглю. Легко нахожу работу (когда-то читал...) B. Saint-Donat , *On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve.* Mathematische Annalen volume 206, pages 157–175 (1973) – там *всё написано*.

Личный комментарий. Меня это теорема в своё время поразила и создала (ложное!?) представление об обозримости множества кривых.

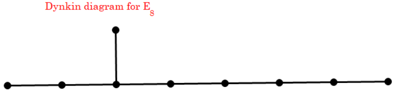
1. Понимание утверждений-2. Уровень условного понимания

Будет полным, если *понять некоторые специальные термины*.

Факт. *Существуют 4-мерные несглаживаемые многообразия.*

Понятно (пространство-время и Большой Взрыв?). Но хочется знать **пример.** Имя (у простейшего?) есть: E_8

≈Википедия: *The manifold can be constructed by first plumbing together tangent disc bundles over the sphere, according to the Dynkin diagram for E_8 a 4-manifold with boundary equal to the Poincaré homology sphere. Freedman's theorem on fake 4-balls then says we can cap off this homology sphere with a fake 4-ball to obtain the E_8 manifold.*



1. Понимание утверждений-2. Уровень условного понимания-бис

Будет полным при *дополнительных предположениях*.

Центральная Предельная Теорема. *Суммы многих одинаково распределённых случайных величин асимптотически нормальны.*

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – непостоянная случайная величина, *имеющая математическое ожидание* $\mathbf{M}\xi$ *и дисперсию* $\mathbf{D}\xi$. Определим *нормализацию* $\mathcal{N}\xi := \frac{\xi - \mathbf{M}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}$ и для $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *как-бы-сумму*

$$\xi^{\langle n \rangle} : \Omega^n \longrightarrow \mathbb{R} : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \frac{\xi(\omega_1) + \cdots + \xi(\omega_1)}{n}.$$

Тогда для любых $a, b \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих $a < b$,

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\Big(a < \mathcal{N}(\xi^{\langle n \rangle}) < b\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x}$$

Это замечательно утверждение абсолютно ясно (и может быть понято, например, студентами-лингвистами, хотя этого почему-то обычно не происходит...) при $\#\Omega < \infty$. В общем случае – для полного понимания – необходимо углубиться в *теорию меры*.

1. Понимание утверждений-3. Уровень полного понимания

Можно перейти к элементарной математике. Вполне ли мы понимаем утверждение

Длина окружности радиуса r

$$\ell(r) = 2\pi r? \tag{1}$$

Не уверен.
Определяем ли мы ℓ через π? Но тогда как определяется число $\pi \in \mathbb{R}$? Математики могут предложить

$$\pi := 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \tag{1'}$$

но это можно мотивировать лишь другой школьной формулой

Площадь круга радиуса r

$$\mathcal{A}(r) = \pi r^2 \tag{2}$$

Или мы знаем, что такое длины и площади? (инженеры знают...). Тогда тривиально: *длина окружности пропорциональна её радиусу*, а *площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса*. И можно можно определить π через любой из коэффициентов пропорциональности в (1) или (2).

Нетривиально: *Эти коэффициенты пропорциональности соизмеримы*. Недостаточно подчеркивается.

Ещё возможность. $\pi := 4\frac{\mathcal{A}(r)}{\ell(r)^2}$. Изопериметрическая задача...

Мораль. Полное понимание общеизвестных фактов иногда иллюзорно?

1. Понимание утверждений-3. Уровень полного понимания-бис

Общие соображения.

Полное понимание (не только математических...) утверждение тесно связано с возможностью совершать *когнитивные операции* над ними, прежде всего специализации и обобщения. См. [**КреШаб2011**], [**KreShab2012**].

Идеальное понимание связано со следующим *триединством.*

• Визуальная модель. Возможна редко (ср. *классификацию конечных простых групп*). Даже если возможна, то обычно условна.
• Формулировка на естественно-подобным языке. Возможна часто (например, в моих сегодняшних примерах), но не всегда – см. [**KreShab2020**]. Требует развитого понятийного аппарата и обходится без (часто случайных) обозначений.
• Использование формальных языков. В идеале возможно всегда. Но... имеющиеся формальные языки плохо согласованы между собой и недружественны по отношению к человеку. *Временные трудности?*

Идеал довольно редко достижим...

1. Понимание утверждений-3. Уровень полного понимания-бис'

Полностью понятые утверждения, восхитившие математика, надолго (навсегда?) запоминаются. Они переформулируются по-разному, обрастают интересными частными случаями и мечтами об обобщениях. Часто складываются приёмы рассказа о них в различных аудиториях.

В совокупности они составляют сокровищницу знаний отдельного математика. Вряд ли эта структура изучена.

За что любить тригонометрию?

2. Понимание доказательств-0. Если честно...

Стоим на плечах гигантов последнего поколения.
Те – на плечах предпоследнего.
...

Ссылаемся на гигантов и друг на друга.
Иногда на ошибочные, иногда на неточно понятые результаты.

Полностью, до мельчайших деталей проверенные (=целиком понятые?) доказательства – редкость. Включая рецензентов, даже из самых престижных журналов, оппонентов (*все результаты полностью обоснованы...*) и т.п.

Можно было бы сослаться на (крайне интересные) тексты Н. Вавилова, но он экстремист.

Математик, столкнувшийся с неточностями в особо длинном и изощрённом доказательстве – **В. Воеводский**. Он же понял и убедил многих, что единственный выход – computer checking. Это не мода и не случайное увлечение, а **насущная потребность современной математики.**

2. Понимание доказательств-1. Уровень структуры

Если (упрощённо!..) понимать доказательство как *последовательность* утверждений $S_1, \ldots, S_n$, где каждое S_i следует из $S_1, \ldots, S_{i-1}$ по правилам формальной логики, то проблема понимания <u>таких</u> доказательств в основном сводится к уже рассмотренным вопросам и некоторому владению логикой.

Обычно (в профессиональной математике) всё сложнее. Соединяются результаты из по-разному формализованных разделов, теоретико-множественные конструкции сочетаются с категорными и т.д.

Но обсуждаемый уровень значительно выше, чем никакой...

2. Понимание доказательств-2. Всё-таки все детали

Иногда полное понимание всё же возможно.

Распространено в студенческих работах, (в отдельных случаях) с точностью до всех деталей проверяемых научным руководителем.

Наиболее убедительный пример – (не 4 краски, а) *классификация конечных простых групп*. Работа огромного количества специалистов + computer checking!

2. Понимание доказательств-3. Идеальное понимание

- Снова восхищение;
- Запоминаемость, понятная воспроизводимость.

Пример. Опять Понселе?

2. Понимание доказательств-4. Эмпирика

Классика: Эйлер

$$\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{p}(n)x^n} \stackrel{!}{=} \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) \stackrel{?!}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x^{\frac{k(3k+1)}{2}}$$

Современность: за счёт возросших экспериментальных мощностей

$$\text{эмпирика} \stackrel{?}{\Longrightarrow} \text{доказательство.}$$

3. Заключение

Даёт ли понимание утверждений и доказательств *новое знание*?

Видимо, да.

• Более общий взгляд на мир.
• Обнаружение/угадывание нетривиальных связей.

Актуальные проблемы.
• Как математики думают и воспринимают чужие мысли?
• Как гармонизировать математические действия человека и компьютера?

Спасибо!

Литература

- Г.Е. Крейдлин, Г.Б. Шабат, *Теорема как вид текста: II. Когнитивные операции над формулировками теорем*. Вестник РГГУ N11(73)/11 (2011), стр.241 – 270.
- G. E. Kreydlin, G. B. Shabat, *The cognitive operations over the texts*. Proceedings of the fifth international conference on the cognitive science, pp. 101 – 102. Kaliningrad, 2012.
- G. E. Kreydlin, G. B. Shabat, *Mathematical Theorems in Natural Languages*. Advances in mathematics research, vol. 28 (2020), pp. 181-194.