Отрицание проблем по Колмогорову

Андрей Родин

Конструктивное знание - 15

4 июля 2022

План:

Zur Deutung der intuitionistischen Logik, *Mathematische Zeitschrift* 35 (1932)

Zur Deutung der intuitionistischen Logik.

Von

A. Kolmogoroff in Moskau.

Die vorliegende Abhandlung kann von zwei ganz verschiedenen Standpunkten aus betrachtet werden.

1. Wenn man die intuitionistischen erkenntnistheoretischen Voraussetzungen nicht anerkennt, so kommt nur der erste Paragraph in Betracht. Die Resultate dieses Paragraphen können etwa wie folgt zusammengefaßt werden:

Neben der theoretischen Logik, welche die Beweisschemata der theoretischen Wahrheiten systematisiert, kann man die Schemata der Lösungen von Aufgaben, z. B. von geometrischen Konstruktionsaufgaben, systematisieren. Dem Prinzip des Syllogismus entsprechend tritt hier z. B. das folgende Prinzip auf: *Wenn wir die Lösung von b auf die Lösung von a und die Lösung von c auf die Lösung von b zurückführen können, so können wir auch die Lösung von c auf die Lösung von a zurückführen.*

Man kann eine entsprechende Symbolik einführen und die formalen Rechenregeln für den symbolischen Aufbau des Systems von solchen Aufgabenlösungsschemata geben. So erhält man neben der theoretischen Logik eine neue *Aufgabenrechnung*. Dabei braucht man keine speziellen erkenntnistheoretischen, z. B. intuitionistischen Voraussetzungen.

Тезис

Основная идея Колмогорова предложенная в статье 1932 года до сегодняшнего дня не реализована в устойчивой форме. Так называемая *BHK*-семантика интуиционистской логики не реализует идею Колмогорова в полноценной форме.

Исчисление задач по Колмогорову:

(1) “Наряду с теоретической логикой, систематизирующей схемы доказательств теоретических истин, возможна систематизация схем решений задач, например, геометрических задач на построение.”

Исчисление задач по Колмогорову:

(2) “Таким образом, наряду с теоретической логикой возникает некоторое новое исчисление задач. При этом нет нужды в каких-либо специальных (например, интуиционистских) теоретико-познавательных предпосылках.”

Исчисление задач по Колмогорову:

(3) "Имеет место следующий замечательный факт: исчисление задач по форме совпадает с брауэровой интуиционистской логикой, недавно формализованной Гейтингом." [ссылка на статью *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, 1930]

Исчисление задач по Колмогорову:

(4) “При признании общих интуиционистских предпосылок [. . .] интуиционистская логика [. . .] должна быть заменена исчислением задач, поскольку ее объекты суть в действительности не теоретические высказывания, а, напротив, задачи.”

Примеры задач по Колмогорову:

(A) Найти такие четыре целые числа $, , z, n$, для которых выполняются соотношения (R)

$$x^n + y^n = z^n, n > 2$$

(B) Доказать, что теорема Ферма неверна.

Комментарий Колмогорова:

“Отличие второй задачи от первой понятно и еще не составляет предмет специфически интуиционистского утверждения.

В противоположность этому высказывания “теорема Ферма неверна” и “существуют четыре числа, удовлетворяющие соотношениям R”, с точки зрения классической логики эквивалентны.”

Мой комментарий:

Найти четыре числа x, y, z, n удовлетворяющие соотношению $R(x, y, z, n)$ и

доказать утверждение "существуют четыре числа x, y, z, n , удовлетворяющие соотношению $R(x, y, z, n)$ "

это *разные* задачи! (Решение) первой задачи влечет (решение) второй, но не наоборот.

Мой комментарий:

Задача (B) формализуется обычными средствами математической логики, которая регулирует порядок *суждений* , то есть, высказываний и их доказательств. Задача (A) не формализуема подобными средствами.

Колмогоров придерживается точки зрения, согласно которой задачи на доказательства утверждений это специальный случай задач более общего вида (включая геометрические задачи на построение).

отношение сводимости задач

отношение сводимости: задача p сводится к набору задач Γ (Wagner Sanz в печати)

$$\Gamma \Vdash p$$

В частности, $\Vdash p$ читается "задача p имеет решение"

Примечание: указание на сведение *решения* задачи p к *решению* задач Γ, которым пользуется Колмогоров, является излишним и может быть опущено. Ср. случай Постулатов 1-3 из "Начал" Евклида.

Постулаты Евклида 1-3

Требуется:

Постулаты 1-3 имеют ту же логическую форму что и последующие задачи, такие как задача построения правильного треугольника. (Постулаты Евклида это не высказывания!) Однако постулаты не предполагают отдельных "решения"; их решения постулируются. Ср. аналогию с аксиомами (в современном смысле слова) и теоремами.

Постулаты Евклида 1-3

Требуется:

1. от всякой точки до всякой [другой] точки провести прямую линию;

Постулаты 1-3 имеют ту же логическую форму что и последующие задачи, такие как задача построения правильного треугольника. (Постулаты Евклида это не высказывания!) Однако постулаты не предполагают отдельных "решения"; их решения постулируются. Ср. аналогию с аксиомами (в современном смысле слова) и теоремами.

Постулаты Евклида 1-3

Требуется:

1. от всякой точки до всякой [другой] точки провести прямую линию;
2. продолжить всякую ограниченную прямую линию непрерывно по прямой;

Постулаты 1-3 имеют ту же логическую форму что и последующие задачи, такие как задача построения правильного треугольника. (Постулаты Евклида это не высказывания!) Однако постулаты не предполагают отдельных "решения"; их решения постулируются. Ср. аналогию с аксиомами (в современном смысле слова) и теоремами.

Постулаты Евклида 1-3

Требуется:

1. от всякой точки до всякой [другой] точки провести прямую линию;
2. продолжить всякую ограниченную прямую линию непрерывно по прямой;
3. по любому данному центру и радиусу построить круг

Постулаты 1-3 имеют ту же логическую форму что и последующие задачи, такие как задача построения правильного треугольника. (Постулаты Евклида это не высказывания!) Однако постулаты не предполагают отдельных “решения”; их решения постулируются. Ср. аналогию с аксиомами (в современном смысле слова) и теоремами.

отношение сводимости задач

Поскольку доказательство теоремы это специальный случай решения задачи, семантика отношения сводимости задач обобщает теоретико-доказательную семантику вывода теорем.

Ср. отношения выводимости $\vdash$ и отношение логического следования $\models$

положительные и отрицательные решения задач

Положительное решение задачи состоит в выполнении предъявляемого в этой задаче требования.

Отрицательное решение задачи состоит состоит в доказательстве (?, см. обсуждение ниже) *невыполнимости* предъявляемого в данной задаче требования.

Формулировки Колмогорова имеют ясный смысл только в случае положительных решений.

отрицательные решения

“Мы нигде не предполагали, что каждая задача разрешима. Пусть, например, теорема Ферма верна; в таком случае решение первой задачи было бы противоречивым. Соответственно этому $\neg A$ означает задачу предположив, что решение задачи A дано, получить противоречие.”

Замечание: Указание на противоречие в определении $\neg A$ (доказательство противоречия?) сводит задачи общего вида к задачам на доказательство теорем.

неразрешимость

“Отметим, что $\neg A$ не следует понимать как задачу “доказать неразрешимость задачи A”. В общем случае, если рассматривать “неразрешимость A” как вполне определенное понятие, мы получаем лишь, что из $\neg A$ вытекает неразрешимость A, но не обратное.

Если бы, например, было доказано, что осуществление вполне-упорядочения континуума превосходит наши способности, еще нельзя было бы утверждать, что из наличия такого вполне-упорядочения вытекает противоречие.”

неразрешимость

Королларий: Сведение к противоречию утверждения “существует положительное решение задачи A” влечет неразрешимость задачи A. Однако обратное в общем случае неверно.

Вопрос: Что такое неразрешимость задачи, если не противоречивость предположения о существовании ее решения?

неразрешимость

Если принять идею Колмогорова о том, что исчисление задач формально совпадает с интуиционистской логикой высказываний, то на этот вопрос можно отметить, предложив альтернативную семантику для $\bot$.

Wagner Sanz интерпретирует $\bot$ как *панацею* (обобщение *ex falso*). Однако такое решение не позволяет понять, как утверждение о существовании положительного решения данной задачи связано с этим решением (почему противоречивость этого утверждения влечет неразрешимость задачи, но не наоборот.)

Замечание: Гомотопическая теория типов (ГТТ) предлагает рамку, позволяющую формально отличать высказывания от внелогических термов способом, который совместим с таким пониманием неразрешимости. Однако определенного ответа на поставленный вопрос ГТТ не дает.

Интуиционистская критика интуиционистского отрицания

"Брауэр дает новое определение отрицания: "A ложно" следует понимать как "A ведет к противоречию". Таким образом, отрицание высказывания A превращается в экзистенциальное высказывание, или высказывание о существовании: "Существует цепь логических заключений, которая, если принять верность высказывания A, приводит к противоречию".

Экзистенциальные высказывания, однако, были подвергнуты Брауэром глубокой критике."

Критика интуиционистского отрицания

Комментарий:

Таким образом Колмогоров указывает на несоответствие между формализацией интуиционистской логики Гейтингом и ее базовыми эпистемологическими принципами.

Экзистенциальное высказывание допускается в данном случае на **мета**-теоретическом, но не объектном уровне. Однако это замечание не опровергает аргумента Колмогорова.

Критика интуиционистского отрицания

“Главный результат интуиционистской критики негативных высказываний должен быть сформулирован следующим простым способом: для общего высказывания бессмысленно в общем случае рассматривать его отрицание как определенное высказывание.

Но тогда исчезает предмет интуиционистской логики, поскольку теперь принцип исключенного третьего оказывается справедливым для всех высказываний, для которых отрицание вообще имеет смысл.”

Критика интуиционистского отрицания

Комментарий:

Закон исключенного третьего допускается в данном случае на **мета**-теоретическом, но не объектном уровне. В современных терминах: чтобы доказать полноту интуиционистской логики высказываний (в частности, по отношению к семантике Крипке), необходимо использовать классические рассуждения. Поэтому предмет интуиционистской логики, вопреки Колмогорову, **не** исчезает.

Однако, Колмогоров вправе рассматривать такое решение как эмистемически некогерентное и неправомочное.

Пример конструктивного отрицания

Интуиционистская геометрия Гейтинга 1925: отношение различия точек $\neq$
Аксиомы:

1. $A \neq B \rightarrow B \neq A$
2. $\neg(A \neq B) \rightarrow A = B$
3. $A \neq B \rightarrow (C \neq A \vee C \neq B)$

позитивная логика?

“Возникает однако, новый вопрос: какие логические законы справедливы для высказываний, отрицание которых не имеет смысла?”

Как высказывания взаимодействуют с объектами других типов?

СПАСИБО!